

Déviations électrostatiques d'un noyau

(1)

Méthode de l'invariant de Runge-Lenz

$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ force centrale $\Rightarrow$ mouvement plan: $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

1) $\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{L}_0 + K\vec{e}_r$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} &= \vec{a} \wedge \vec{L}_0 + \vec{v} \wedge \frac{d\vec{L}_0}{dt} + K\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= \frac{\vec{F}}{m} \wedge \vec{L}_0 + \vec{0} + K\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= \frac{K}{mr^2} \vec{e}_r \wedge mr^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta + K\dot{\theta}\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -K\dot{\theta}\vec{e}_\theta + K\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0} \quad \text{donc } |\vec{R}| = \text{constant}$$

2) $\vec{R} \cdot \vec{OM} = [m(-\dot{r}r^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r^3\dot{\theta}^2\vec{e}_r) + K\vec{e}_r] \cdot (r\vec{e}_r)$

$$\vec{R} \cdot \vec{OM} = m r^4\dot{\theta}^2 + Kr$$

$$\|\vec{R}\| r \cos\theta = mC^2 + Kr \quad \text{avec } C = r^2\dot{\theta} \text{ cste des aires.}$$

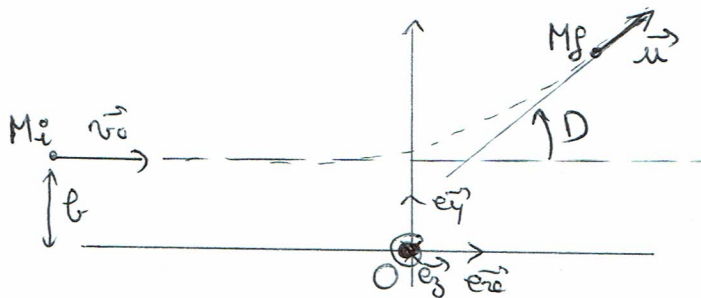
$$\text{soit } r = \frac{mC^2}{\|\vec{R}\| \cos\theta - K}$$

$$\text{ou } r = \frac{MC^2/K}{\frac{\|\vec{R}\|}{K} \cos\theta - 1}$$

On obtient bien $r = \frac{p}{-1 + e \cos\theta}$ avec $p = MC^2/K$ et $e = \frac{\|\vec{R}\|}{K}$

$\hookrightarrow$ branche "répulsive" de l'hyperbole.

3) le vecteur de Runge-Lenz est un invariant du mouvement. Il reste donc constant entre les deux situations où la particule α est à l'infini par rapport au noyau.



$$\begin{aligned} \text{En } M_i: \vec{R} &= \vec{v}_0 \wedge \vec{L}_0 + K(-\vec{e}_r) \\ &= v_0 \vec{e}_r \wedge (-\|\vec{L}_0\| \vec{e}_\theta) - K\vec{e}_r \\ \vec{R} &= m b v_0^2 \vec{e}_y - K\vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\text{avec } \vec{L}_0 = \text{cste} = b v_0 m \vec{e}_z$$

En M_g : $\vec{R} = \vec{u} \wedge \vec{L}_0 + K \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

(2)

$$\vec{R} = (\|\vec{u}\| \cos D \vec{e}_r + \|\vec{u}\| \sin D \vec{e}_y) \wedge (-b v_0 \vec{e}_z)_{xm.} \\ + K \cos D \vec{e}_r + K \sin D \vec{e}_y$$

$$\vec{R} = \|\vec{u}\| \cos D \vec{e}_y + \|\vec{u}\| \sin D b v_0 m (-\vec{e}_r) \\ + K \cos D \vec{e}_r + K \sin D \vec{e}_y$$

soit $\boxed{\vec{R} = (-\|\vec{u}\| (\sin D) b v_0 m + K \cos D) \vec{e}_r + (\|\vec{u}\| b v_0 m (\cos D) + K \sin D) \vec{e}_y}$

Par identification entre les deux expressions de $\vec{R}$ on obtient:

/ $\vec{e}_y$: $m b v_0^2 = \|\vec{u}\| b v_0 m \cos D + K \sin D$

On $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ étant conservative: $E_m(M_i) = E_m(M_g)$

avec $E_p = \frac{K}{r} \rightarrow 0$ pour M_i et M_g

donc $E_c(M_i) = E_c(M_g)$ soit $v_0 = \|\vec{u}\|$.

d'où $m b v_0^2 = b v_0^2 m \cos D + K \sin D$.

soit $m b v_0^2 (1 - \cos D) = K \sin D$

donc $\frac{\sin D}{1 - \cos D} = \frac{m b v_0^2}{K}$

Or $\sin D = 2 \sin \frac{D}{2} \cos \frac{D}{2}$
 et $1 - \cos D = 2 \sin^2 \frac{D}{2}$ } $\frac{\sin D}{1 - \cos D} = \frac{\cos \frac{D}{2}}{\sin \frac{D}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{D}{2}}$

On obtient $\tan \frac{D}{2} = \frac{K}{m b v_0^2}$

avec $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r = \frac{Z e \times Z e}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

donc $K = \frac{Z e^2}{2 \pi \epsilon_0}$

d'où le résultat attendu:

$$\boxed{\tan \frac{D}{2} = \frac{Z e^2}{2 \pi \epsilon_0 m b v_0^2}}$$