

Problème 1 : Supports : adhérence ou pas ? CCINP MP 2020

Le sujet s'intéresse à différents cas de frottements secs qui induisent des types de mouvement relatif possible dans certaines conditions pour un couple solide 1-solide 2. Ces propriétés viennent du choix du support pour un mobile donné.

La **partie I** est une question de cours à propos des lois de Coulomb dont les réponses attendues permettront aux candidats de mieux exploiter les parties II, III et IV qui peuvent néanmoins être traitées de manière indépendante.

Les **parties II et III** présentent des exemples de mesures de coefficients de frottement solide.

La **partie IV** développe une modélisation simple du phénomène de « slip-stick ».

La **partie V** s'intéresse à un support particulier : la glace.

La **partie VI** étudie la fabrication d'un support roulier : le béton.

La **partie VII** s'intéresse à la modification bénéfique des propriétés de ce support : les roues charrantes.

Partie I - Lois de Coulomb relatives au glissement

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle $\|\vec{T}\|$ est inférieure à la quantité $f_s \|\vec{N}\|$ dans laquelle $\|\vec{N}\|$ représente la norme de la composante normale $\vec{N}$ de la réaction : $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$.
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $\|\vec{T}\| = f_g \|\vec{N}\|$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$ et $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = 0$.

Q1. a) Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ d'un solide par rapport à un autre en un point de contact.

b) Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?

Q2. Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.

Q3. Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

Partie II - Mesure du coefficient de frottement dynamique

On utilise le dispositif représenté sur la figure 1. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_g$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S' .

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t=0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t=0) = H_0$.

Durée : 4 heures
Calculatrice : autorisée
3 problèmes indépendants.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S , sachant que le solide 2 touche S' avant que le solide 1 ne s'arrête.

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (figure 1), avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Q4. Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.

Q5. La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient N , T , F , g , α , M , l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du solide 1 et l'accélération verticale $\ddot{Z}$ du solide 2.

Q6. Traduire la loi de Coulomb pour exprimer $\vec{T}$.

Q7. On s'intéresse à la première phase du mouvement.

- a) Exprimer le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Z}$ en le justifiant dans cette première phase.
- b) Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α , f_g et g .
- c) Quelle est la durée t_1 de cette première phase ?
- d) Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?

Q8. On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.

- a) Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t , t_1 , V_1 , X_0 , H_0 , g et f_g .
- b) Exprimer f_g en fonction de α , H_0 et D .

Q9. Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement.

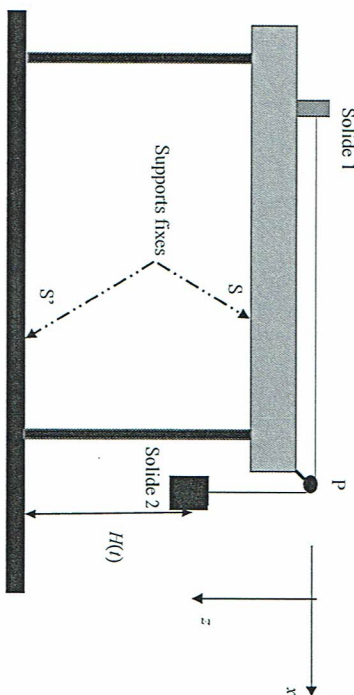


Figure 1 - Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

- Q10. On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40,0 \text{ cm}$. La masse du solide 1 vaut $M = 50 \text{ g}$ et celle du solide 2 vaut $m = 60 \text{ g}$. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $\langle D \rangle = 1,50 \text{ m}$.

Partie III - Mesure du coefficient de frottement statique

- Q11. On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la figure 2. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{lim}$ le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement f_s .

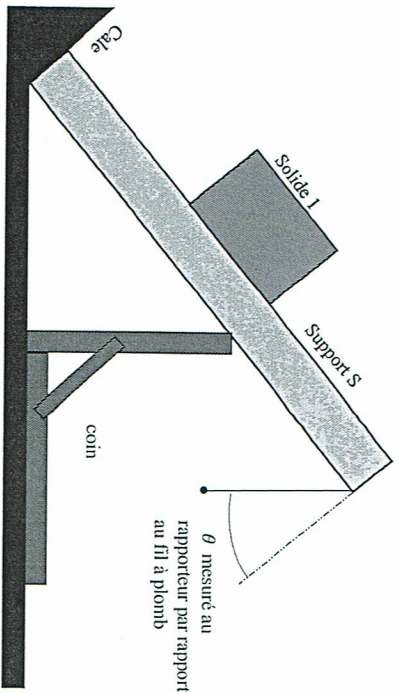


Figure 2 - Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.

- Q12. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de θ_{lim} est de l'ordre de $29,5^\circ$. En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré.

Partie IV - Phénomène de « slip-stick »

Données : accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Le domaine des ondes sonores, perceptibles par l'oreille humaine, va d'une fréquence de 20 Hz à une fréquence de 20 kHz . Une grande fréquence correspond à un son aigu.

Consignes : on notera systématiquement N et T les normes des composantes normale et tangentielle de la réaction d'un support. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Le phénomène « slip-stick » (littéralement glisser-coller) intervient quand les coefficients de frottement statique et dynamique ont des valeurs très différentes. Il s'agit d'un mouvement saccadé qui contient des phases de glissement et d'adhérence successives dont on décrit ci-dessous une modélisation.

Le solide 1 de masse $M = 50 \text{ mg}$ est relié par un ressort de raideur k à un point fixe A. Il se déplace sur un tapis roulant horizontal caractérisé par un coefficient de frottement dynamique nul et par un coefficient statique $f_s = 0,6$. La situation est représentée figure 3. On note $X(t)$ l'allongement instantané du ressort. Dans la situation initiale, $X(t=0) = X_0 > 0$ et le solide 1 est abandonné sans vitesse initiale relativement au tapis. Celui-ci se déplace à la vitesse uniforme $V = V e_x$.

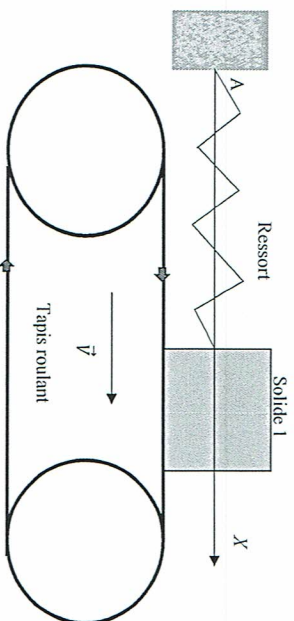


Figure 3 - Modélisation du « slip-stick »

- Q13. Établir les expressions :
- a) de l'allongement $X(t)$
 - b) de la date t_1 associée au début de glissement du solide 1 par rapport au tapis.

- Q14. a) Quelle est la nature du mouvement après la date t_1 ?
b) Déterminer par une méthode énergétique l'allongement maximal X_M atteint par la masse en fonction de X_1 , V et la pulsation propre de l'oscillateur ω_0 .

- Q15. a) Déterminer les fonctions allongement $X(t)$ et vitesse $\dot{X}(t)$ pendant la phase de glissement.
b) Pour quelle valeur de $\dot{X}(t = t_2)$, cette phase s'arrête-t-elle ?
c) Représenter l'allure de $X(t)$ et de $\dot{X}(t)$ entre $t = 0$ et $t = t_1 + t_2$.

- Q16. À quelle condition d'intégralité entre la période propre t_0 et $\frac{X_1}{V}$ peut-on considérer que l'abscisse maximale X_M est très voisine de X_1 ?
On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de cette partie.

- Q17. Montrer qu'alors la fréquence approchée du mouvement est donnée par : $\nu = \frac{\omega_0^2 V}{2g f_s}$.
Évaluer numériquement cette fréquence en supposant que la raideur vaut $k = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$ et que la vitesse du tapis roulant vaut $V = 6 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

⊗ t_2 est compté en partant d'une nouvelle origine des temps au début de la phase de glissement

Q18. Représenter l'allure de $X(t)$ sur une période.

Q19. Ce phénomène se retrouve dans beaucoup de situations quotidiennes : craie qui crisse sur un tableau, porte qui grince, pneu qui crisse et archet de violon.

- a) Dans quel domaine de fréquences sont donc ces mouvements de « slip-stick » ?
- b) Pourquoi en cassant la craie supprime-t-on ce crissement, sachant que la raideur k d'un bâton est inversement proportionnelle au cube de sa longueur ?

Q20. Évaluer le travail des forces de frottement sur une période dans ce modèle. Commenter.

IV Exemple d'utilisation de ce capteur : un accéléromètre asservi

Le schéma de la figure 12 décrit le principe de fonctionnement d'un accéléromètre. La masse sismique m , de centre d'inertie G peut se translater sans frottement le long de l'axe O_1O' relié au boîtier de l'accéléromètre. Cette masse est par ailleurs fixée d'une part à l'extrémité libre d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 et d'autre part à un amortisseur exerçant une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de la masse avec le coefficient constant λ . Les autres extrémités du ressort et de l'amortisseur sont fixées au boîtier.

Le référentiel terrestre supposé est

galiléen d'origine fixe O . On se limite à l'étude d'un déplacement rectiligne selon la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}_2$ orthogonal à celle de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. On note O_1 le point du boîtier tel que $\overrightarrow{OO_1} = Z_1 \vec{u}_2$. En posant $O_1 \vec{G} = Z \vec{u}_2$, le point G est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO_1} + O_1 \vec{G} = (Z + Z_1) \vec{u}_2$.

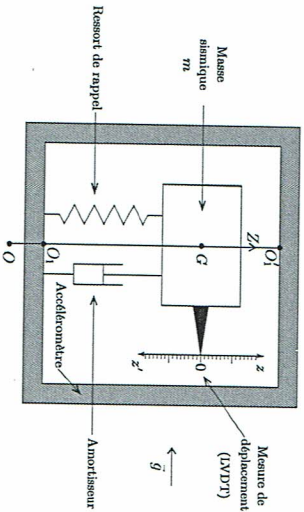
IV.A Première étude : le boîtier est immobile

Dans cette première étude O_1 est fixe, Z_1 est donc constant.

La masse minime est rattachée à la partie mobile du MVDF conditionnée selon la protection dont dans les parties précédentes. On suppose que la translation du moyeu mobile du MVDF a effective-
sauts fortement

□ — 33. Justifier le fait que la force électromagnétique reçue par le noyau mobile lors de son déplacement est nulle.

FIGURE 12 – Accéléromètre asservi à masse sismique.



- 1) Lorsque G est en mouvement, établir l'équation différentielle vérifiée par $Z(t)$.
On pose $Z = Z(t) - Z_1$.
- 2) Déterminer l'expression de Z à l'équilibre.
- 3) Quelle valeur minimale λ doit-il imposer à λ afin que la masse retrouve sa position d'équilibre sans oscillation?

IV - B - Ende simplifiziert den bisherigen mehrstufigen.

Desormais la barbe de l'acétalaminine se dissout selon l'équation (O, $\overline{xy}$).

On note $\chi_1 = \frac{d^2 \epsilon}{d\tau^2}$ avec χ_1 caract.

On s'inscrit au département du curateur
sur la réquette (cf figure 12). On se place
donc dans la référence du bâton.

4) Montrer que la échua de la position de l'index sur la réglette ou bout d'un temps infini permet de ramener à l'accélération du bñton.

5) le mouvement de la main se décompose en un régime transitoire suivi d'un régime permanent. Quelle condition doit remplir A pour que le temps de réponse du capteur soit le plus court possible ?

Problème 3

La comète 13P/Olbers (Mines – Pons 2009, filière MP)

L'astronome allemand HEINRICH W. M. OLBERS (1758–1840) découvrit les astéroïdes Pallas et Vesta en 1802 et en 1807 ; en 1831, il réalisa la première observation de la comète qui porte son nom (13P/Olbers). Les caractéristiques orbitales de cette comète ont été déterminées initialement par C. F. GAUSS et F. BESSEL. Elle a été observée pour la dernière fois lors de son passage au périhélie (distance minimale au Soleil) le 10 janvier 1956. Certaines propriétés de cette comète sont examinées dans ce problème.

On étudie le mouvement d'un corps ponctuel M de masse m , soumis à l'action d'un centre attracteur fixe à l'origine O des coordonnées d'un référentiel galiléen R. On posera $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$. On note $\vec{v}$ la vitesse de M dans R. L'action de ce centre attracteur est décrite par une force unique $\vec{F} = -m \frac{dU(r)}{dr} \vec{u}_r$.

1. Définir le moment cinétique $\vec{L}_O$.
2. Démontrer que le mouvement de M est plan.
3. On notera $\vec{u}_z$ le sens d'un axe fixe de R perpendiculaire à ce plan. En déduire que la grandeur $\frac{\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z}{m}$ est une constante notée C.

L'étude du mouvement dans ce plan se fera en coordonnées polaires (r, θ) .

4. On note $E = m\epsilon$ l'énergie mécanique de M. Exprimer ϵ en fonction de $r, C, \dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et $U(r)$.

Le point M est en fait le centre d'une comète se déplaçant dans le champ de gravitation du soleil (de masse M_S). On adopte l'expression $U(r) = -\frac{K}{r}$, où K est une constante.

5. Exprimer K en fonction de la constante de la gravitation universelle G et de la masse du soleil.
6. A quelle condition sur ϵ le mouvement de M vérifie-t-il $r_{\min} \leq r \leq r_{\max} < \infty$ avec $r_{\min} \neq r_{\max}$? Les constantes $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont respectivement appelées périhélie et aphélie de la trajectoire.

On suppose désormais que la condition ci-dessus est respectée. L'origine des instants ($t = 0$) et l'origine des angles polaires ($\theta = 0$) sera choisie de telle sorte que $r(t = 0) = r_{\min}$ et $\theta(t = 0) = 0$.

7. Exprimer ϵ et C en fonction de K, $r_{\min}$ et $r_{\max}$ puis en fonction de K, $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$ et $p = \frac{r_{\max} r_{\min}}{a}$.
8. Quelle est sans démonstration la nature de la trajectoire de M ? Indiquer en justifiant votre réponse, la signification physique des grandeurs a, p et $e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$?
9. Représenter la trajectoire de M en précisant les points et dimensions remarquables. On étudie maintenant la partie de la trajectoire pour laquelle $0 < \theta < \pi$.
10. Quel est alors le signe de $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$? Exprimer $\dot{r}$ en fonction de K, ϵ, C et r .

11. Montrer que la durée du parcours de $r_{\min}$ à $r(\theta)$ le long de la trajectoire s'écrit :

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\theta)} \frac{r^{(\theta)} dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r - a)^2}}.$$

On effectue le changement de variable $r = a(1 - e \cos \xi)$, l'angle ξ est appelé anomalie excentrique.

12. Exprimer la durée τ du trajet du mobile M depuis l'instant initial jusqu'à sa position repérée par ξ , en fonction de ξ, e, a , et K ; en déduire la relation qui lie la période T du mouvement, K et a. Quel est le nom de la relation qui lie T, K et a ?
13. En déduire l'expression de τ en fonction de ξ, e et de la période T.

On considère que la trajectoire de la terre autour du soleil est circulaire, de rayon $a_0 = 1$ UA (unité astronomique) et de période $T_0 = 1$ année = 365,25 jours. Les caractéristiques orbitales de la comète sont $e = 0,930$ et $r_{\min} = 1,18$ UA.

14. A quelle date la comète revient-elle pour la prochaine fois à son périhélie ?

On donne $\left(\frac{118}{7}\right)^3 = 69$

