

Corrigé du devoir maison n° 2

Mécanique

Partie A Mouvements cométaires, Mines-Ponts, MP, 2009

1. L'application du théorème du moment cinétique au point M soumis dans le référentiel R galiléen à la force centrale $\vec{F} = -m \frac{dU}{dr} \vec{u}_r$ permet de montrer que le vecteur $\vec{L}_O$ est constant : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = -r\vec{u}_r \wedge m \frac{dU}{dr} \vec{u}_r = \vec{0}$.

Le vecteur moment cinétique $\vec{L}_O$ étant orienté dans une direction constante, le vecteur position est alors constamment contenu dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}_O$ et passant par O. Le mouvement est donc plan.

2. L'énergie mécanique de M a pour expression : $E = \frac{1}{2}mv^2 + mU(r)$, $mU(r)$ étant l'énergie potentielle associée à la force $\vec{F}$ d'après la notation de l'énoncé.

La vitesse du point M en coordonnées polaires s'écrivant $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, on a alors : $L = mr^2\dot{\theta}$ soit $C = r^2\dot{\theta}$.

On obtient donc $E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mU(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + mU(r)$.

On a donc finalement : $\epsilon = \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} + U(r)$.

3. La force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil sur la comète a pour expression $\vec{F} = -\frac{GmM_S}{r^2}\vec{u}_r = -m \frac{dU}{dr} \vec{u}_r$.

La force $\vec{F}$ dérivant de l'énergie potentielle $mU(r)$, on en déduit alors par intégration que $U(r) = -\frac{GM_S}{r}$ donc $K = GM_S$.

4. Pour que le mouvement de M vérifie $r_{min} \leq r \leq r_{max} < \infty$ il faut $\epsilon < 0$ (cf. cours).

5. D'après le cours, on a pour ce type de mouvement $E = -\frac{GmM_S}{r_{min}+r_{max}}$.

On a alors : $\epsilon = -\frac{K}{r_{min}+r_{max}} = -\frac{K}{2a}$.

On peut de plus écrire au périhélie, r étant minimum et donc $\dot{r}$ nul en ce point de la trajectoire, que $\epsilon = \frac{1}{2}\frac{C^2}{r_{min}^2} - \frac{K}{r_{min}}$.

On a alors : $-\frac{K}{r_{min}+r_{max}} = \frac{1}{2}\frac{C^2}{r_{min}^2} - \frac{K}{r_{min}}$ ce qui permet après calcul d'obtenir l'expression

de C : $C = \sqrt{\frac{2Kr_{max}r_{min}}{r_{max}+r_{min}}} = \sqrt{Kp}$.

6. La trajectoire de M est une ellipse de paramètre p, d'excentricité e et de demi-grand axe a. Ces trois grandeurs sont reliées par la relation $p = a(1 - e^2)$.

7. Entre 0 et π , la valeur de r augmente, passant de r_{min} pour $\theta = 0$ à r_{max} pour $\theta = \pi$. On en déduit que sur cette partie de la trajectoire $\dot{r} > 0$.

$$\epsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r} \text{ donc } \boxed{\dot{r} = \sqrt{2\epsilon - \frac{C^2}{r^2} + \frac{2K}{r}}}.$$

La durée de parcours s'obtient à partir de la relation $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

$$\text{En effet : } \tau = \int_{t=0}^{\tau} dt = \int_{r_{\min}}^{r(\theta)} \frac{dr}{\dot{r}}.$$

On peut par ailleurs écrire $\dot{r}$ sous la forme $\dot{r} = \sqrt{-\frac{2K}{2a} - \frac{Kp}{r^2} + \frac{2K}{r}}$.

$$\text{On a alors : } \dot{r} = \sqrt{\frac{K}{ar^2}} \sqrt{-r^2 - ap + 2ar} = \sqrt{\frac{K}{ar^2}} \sqrt{-r^2 - a^2(1-e^2) + 2ar}$$

$$\text{soit } \dot{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{K}{a}} \sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}$$

$$\text{On retrouve alors l'expression de l'énoncé : } \tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\theta)} \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}.$$

$$8. \text{ En effectuant le changement de variable proposé on obtient : } \tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\theta)} \frac{a(1-ecos\xi)dr}{\sqrt{a^2e^2 - a^2e^2\cos^2\xi}}$$

$$\text{soit } \tau = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\theta)} \frac{a(1-ecos\xi)(aesin\xi d\xi)}{aesin\xi} = \sqrt{\frac{a}{K}} \int_{r_{\min}}^{r(\theta)} a(1-ecos\xi)d\xi.$$

On obtient alors après intégration : $\tau = \sqrt{\frac{a^3}{K}} (\xi - esin\xi)$ car $r_{\min} = a(1-e)$ donc $\xi = 0$.

En $r_{\max}$, $\tau = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{a^3}{K}} \pi$ car $r_{\max} = a(1+e)$ donc $\xi = \pi$.

On a donc : $\tau = \frac{T}{2\pi} (\xi - esin\xi)$.

Les paramètres T, K et a sont reliés par la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \frac{4\pi^2}{K}$.

9. La comète reviendra au périhélie au bout d'une période T .

Cette période peut être obtenue à partir de la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \frac{T_0^2}{a_0^3}$.

On a par ailleurs la relation : $r_{\min} = a(1-e)$.

On en déduit alors : $T = T_0 \left(\frac{r_{\min}}{a_0(1-e)} \right)^{3/2}$ donc $T = 69,2$ ans. La comète repassera au périhélie le 28 mars 2025.

Pour connaître la date à laquelle la comète se trouvera à 26,06 UA du Soleil, il faut calculer les valeurs de ξ correspondantes : $\xi = \arccos\left(\frac{1}{e} - \frac{r}{ae}\right)$.

On trouve $\xi_1 = 2,198 \text{ rad}$ et $\xi_2 = -2,198 \text{ rad}$. On obtient à partir de la relation $\tau = \frac{T}{2\pi} (\xi - esin\xi)$ la valeur $\tau_1 = 15,9 \text{ ans}$ ce qui correspond à la fin de l'année 1976.

C'est donc la seconde valeur qui nous intéresse. Elle se calcule à partir de la relation $\tau_2 = T - \tau_1$. On obtient la date du 26 avril 2009.

Partie B Dynamique de molécules diatomiques, ATS 2003

B.1 Point matériel fictif A

B.1.1

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. Le référentiel héliocentrique est le meilleur référentiel galiléen identifiable expérimentalement.

B.1.2

D'après le principe des actions mutuelles $\boxed{\vec{F}_2 = -\vec{F}_1}$