

Devoir surveillé de physique n°1

Durée : 3 heures mais vous pouvez rester 4 heures

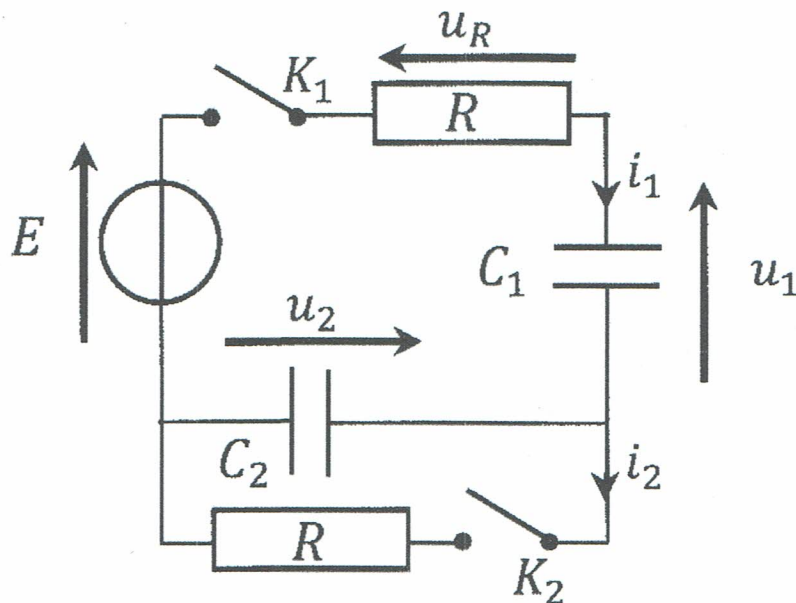
Calculatrice : autorisée

Trois problèmes indépendants

Problème 1 : Régimes transitoires (ENAC 2025)

Le circuit représenté sur la figure ci-dessous est constitué d'un générateur de tension continue idéal de tension à vide E , de deux résistances R identiques et de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 . Les deux interrupteurs K_1 et K_2 sont initialement ouverts, le condensateur C_2 est déchargé, tandis que C_1 a été chargé préalablement de sorte que la tension à ses bornes vaut initialement $u_1 = E/2$.

A l'instant pris comme origine des temps, on ferme K_1 tout en maintenant K_2 ouvert



- 1) Déterminer à la date $t = 0+$ c'est-à-dire juste après la fermeture de K_1 , l'expression de la tension $u_R(0+)$.
- 2) Déterminer l'expression de l'intensité $i_1(t)$ du courant électrique pour $t > 0$ en précisant l'expression des constantes d'intégration.
- 3) Déterminer l'expression de $u_1(t)$ pour $t > 0$ en précisant les constantes d'intégration.
- 4) Même question pour $u_2(t)$.

On attend suffisamment longtemps pour que le circuit atteigne un régime établi puis on ferme K_2 (tout en laissant K_1 fermé) à un instant pris comme nouvelle origine des temps.

- 5) Déterminer, à la date $t = 0+$, c'est-à-dire juste après la fermeture de K_2 , l'expression de l'intensité $i_2(0+)$ d'une part et déterminer également sa valeur $i_2(\infty)$ lorsque le nouveau régime établi est atteint.
- 6) On suppose que $C_1 = C_2$. Après la fermeture de K_2 , déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_2(t)$.
- 7) Tracer l'allure de la courbe $u_2(t)$ en justifiant son tracé.

Piézoélectricité et application à l'optique adaptative

Jacques et Pierre CURIE ont découvert en 1880 l'effet piézoélectrique. Cet effet est présent dans des matériaux cristallins ne possédant pas de centre de symétrie. Il se traduit par la capacité de certains matériaux à se polariser et à faire apparaître des charges électriques de surface suite à une contrainte mécanique qui les déforme (effet direct). La déformation résultant de l'application d'un potentiel électrique est appelée l'effet inverse.

Ces deux effets permettent donc l'utilisation d'un cristal piézoélectrique à la fois comme capteur et actionneur. L'effet piézoélectrique inverse permet de contrôler le déplacement d'une structure en contrôlant la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique. De la même façon, l'effet piézoélectrique direct produira un potentiel électrique si le matériau est déformé.

L'objectif de ce problème est d'étudier cet effet

De nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres.

Le candidat notera que certaines questions sont rapides, d'autres exigent des réponses plus argumentées. Dans certains cas, la résolution du problème passe par des prises d'initiatives du candidat, il est alors attendu des explications claires sur la démarche engagée qui peut passer par des réalisations de schémas.

Notations

On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

On associe à une grandeur réelle $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe $\underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$.

On note A^* le conjugué du nombre complexe A .

1 Modèle électrique du quartz

Un cristal de quartz est taillé sous forme d'une lame à faces parallèles, d'épaisseur e . Sur les deux faces en regard, on effectue un dépôt métallique permettant d'obtenir deux électrodes, puis de connecter l'ensemble à un circuit électrique.

L'application d'une différence de potentiel u entre les électrodes conduit à l'apparition d'une charge $\pm q$ sur celles-ci, et à une variation d'épaisseur du quartz, d'une quantité algébrique x . La figure 1 ci-dessous définit les conventions d'orientation.

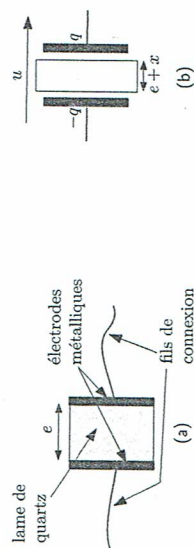


FIGURE 1 – lame de quartz. (a) Montage. (b) Représentation symbolique et définition des grandeurs.

On admet pour l'instant les équations constitutives (EC), qui seront justifiées par la suite :

$$\begin{cases} \frac{q}{C} + \alpha x = u \\ m\ddot{x} + \delta\dot{x} + kx + \alpha q = 0 \end{cases} \quad (EC)$$

où on a noté $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Les coefficients C , m , δ , k et α sont des constantes positives.

- [1] Établir l'équation différentielle reliant la variation d'épaisseur x à la différence de potentiel appliquée aux bornes du quartz. En déduire l'équation, notée (E), vérifiée par la vitesse $v = \dot{x}$.
- [2] La stabilité du système est étudiée pour le régime libre $u = 0$. Qu'appelle-t-on stabilité ? À quelle(s) condition(s) portant sur les coefficients le système est-il stable ?
- [3] Dans toute la suite, on supposera que $k > C\alpha^2$. Réécrire l'équation (E) en utilisant les grandeurs :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k - C\alpha^2}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\delta}$$

- [4] On suppose que $u(t)$ est un échelon de tension :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{constante pour } t > 0 \end{cases}$$

Le cristal de quartz est initialement au repos. Pour $Q > 1/2$, montrer que la solution $v(t)$ de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} \sin(\omega_0' t)$$

et donner les expressions de τ et ω_0' en fonction de Q et ω_0 . On ne cherchera pas à déterminer la constante A . Que dire de ω_0' lorsque $Q \gg 1$; à quelle situation physique cette limite correspond-elle ?

- [5] On définit le temps de réponse τ_0 du quartz comme le temps au bout duquel l'enveloppe du signal est inférieure à 5% de sa valeur initiale. Exprimer τ_0 en fonction de Q et de la pseudo-période d'oscillation. En déduire une interprétation de Q . $\omega_0 \gg \omega_0'$ $Q \gg 1$.

On travaille à présent en notation complexe, le quartz étant alimenté par un générateur de pulsation ω .

- [6] Le courant i parcourant le quartz est défini en convention récepteur. Définir, puis calculer à partir de (EC), l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle. Celle-ci sera exprimée en fonction de ω , k , α , C , δ et m .

- [7] On cherche à montrer que ce comportement est équivalent à celui du dipôle électrique représenté sur la figure 2 ci-après.

Calculer l'impédance équivalente $\underline{Z}_e$ du modèle proposé sur la figure, puis, par identification, vérifier qu'elle se comporte comme $\underline{Z}$. Donner les valeurs de C_s , R_s , L_s et C_p en fonction de C , α , m , δ et k .

La branche $\{R_s, C_s, L_s\}$ est qualifiée de branche série, ou branche dynamique ou motonnelle, et le condensateur C_p constitue la branche parallèle ou statique.

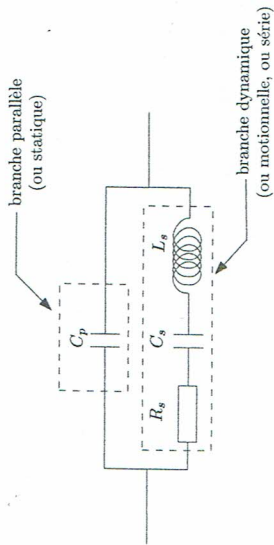


FIGURE 2 – Circuit électrique équivalent à la lame de quartz.

- [8] Dans les quartz réels, on peut avoir $Q \approx 10^5$, de sorte que R_s est très faible. On étudie dans cette question le cas $R_s = 0$. Montrer que l'impédance $\underline{Z}$ peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\underline{Z} = \frac{1}{j(C_p + C_s)\omega} \times \frac{1 - \omega^2/\omega_s^2}{1 - \omega^2/\omega_p^2}$$

et donner les expressions des pulsations de résonance série ω_s et parallèle ω_p en fonction de C_p , C_s et L_s . Comparer ω_s à ω_0 (défini à la question 3).

Pourquoi parle-t-on de résonance en ω_s et d'antirésonance en ω_p ? Que vaut le courant dans la branche série à $\omega = \omega_s$?

Les valeurs typiques sont de l'ordre de $C_p \approx 10^{-12}$ F et $C_s \approx 10^{-14}$ F. Calculer alors le paramètre $\frac{\omega_p^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2}$ et donner sa valeur numérique. Qu'en conclure sur la position de ces deux pulsations?

Proposer alors une expression approchée de $(\omega_p^2 - \omega_s^2)/\omega_s^2$ en fonction de l'écart relatif entre ω_s et ω_p .

- [9] Dans cette question, on suppose à nouveau que $R_s \neq 0$. On veut justifier que la résonance et l'antirésonance sont bien visibles séparément.

Le facteur de qualité Q représentant le rapport entre la pulsation de résonance et la bande passante, donner la largeur de la résonance et la comparer à l'écart entre ω_s et ω_p . Si l'on avait eu $Q = 10^2$, séparerait-on la résonance de l'antirésonance?

Tracer qualitativement $|\underline{Z}|$ en fonction de ω pour $Q = 10^5$.

2 Obtention des équations constitutives

2.1 Charges et force

On cherche ici à comprendre l'origine des équations constitutives (EC) données en introduction.

2.1.1 Condensateur

On s'intéresse ici à un condensateur plan idéal, dont les armatures sont fixes. Ce condensateur est situé dans le vide. Le régime est statique.

- [10] Rappeler les propriétés de symétrie du champ électrostatique déduites de celles des charges qui le créent. Énoncer le théorème de Gauss. Calculer alors le champ électrostatique créé par un plan infini chargé uniformément.

Problème 3 : Modulation - Démodulation

Partie III - Modulation

III.A - Le champ électromagnétique rayonné par l'antenne doit être modulé pour qu'il puisse véhiculer des informations. Supposons d'abord que le signal de modulation soit sinusoïdal $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$. Ce signal module la porteuse $v_p(t) = V_p \cos \omega_p t$ qui est la tension appliquée à l'antenne d'émission en l'absence de modulation. La porteuse est fournie par un oscillateur sinusoïdal haute fréquence dont la fréquence d'oscillation $f_p = \omega_p / 2\pi$ ($f_p \gg f_m = \omega_m / 2\pi$) est particulièrement stable.

III.A.1) La modulation s'effectue à l'aide

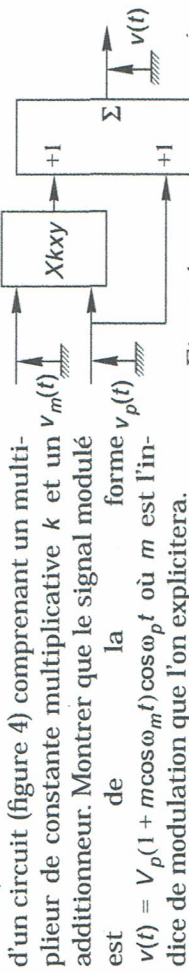


Figure 4

III.A.2) Afin de mesurer l'indice de modulation du signal porteur, on réalise les deux oscillogrammes représentés (figure 5).

Quels sont les modes de l'oscilloscope utilisés pour la réalisation de chacun de ces oscillogrammes ? Exprimer l'indice de modulation en fonction des tensions extrémales $V_1 = 2V$, $V_2 = 18V$ et le calculer numériquement.

III.A.3) Déterminer le spectre de fréquences du signal modulé $v(t)$ et le représenter. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquences nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence f_m .

III.A.4) En l'absence de modulation ($m = 0$), la puissance rayonnée par l'antenne est $P = 2100 \text{ kW}$. Quelle puissance P_r rayonne cette antenne quand l'indice de modulation m a la valeur calculée à la question III.A.2.

III.A.5) Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquences $[f_{m1}, f_{m2}]$ (figure 6). Représenter le spectre de fréquences du signal modulé. En radiodiffusion $f_{m1} = 300 \text{ Hz}$ et $f_{m2} = 4,5 \text{ kHz}$, quelle est la largeur de la plage de fréquences occupée par le signal modulé ? Quel écart minimal de fréquence $\Delta f_{\min}$ doit-il exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soit pas mutuellement brouillées ?

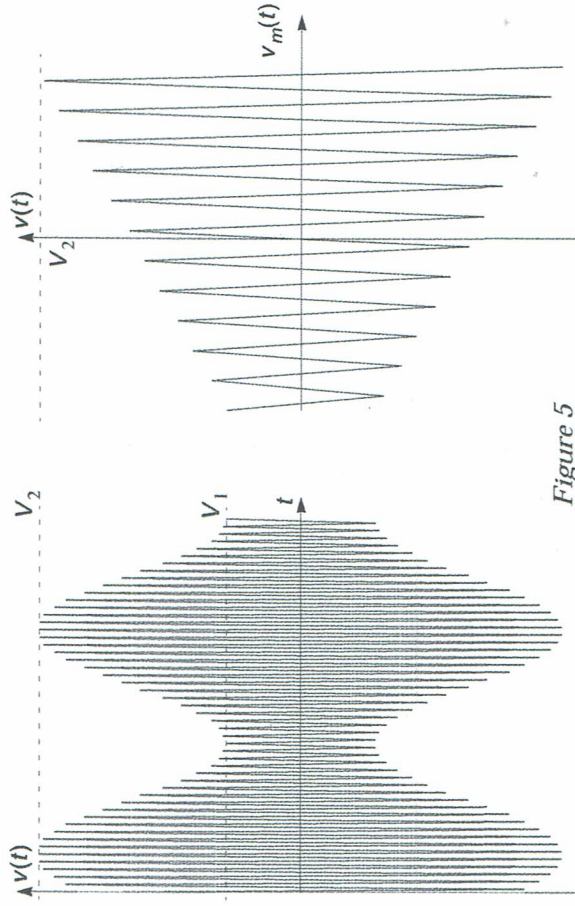


Figure 5

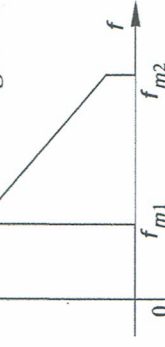
III.B - En fait, le signal modulé doit être amplifié avant d'être appliqué à l'antenne. Pour cela, on intercale entre la sortie du modulateur délivrant le signal $v(t)$ et l'antenne, un amplificateur sélectif dont le circuit équivalent est donné figure 7. La transconductance g de l'amplificateur est une constante réelle dans la bande de fréquences utilisée et le circuit (R, L, C) est accordé sur la fréquence f_p du signal porteur ($LC\omega_p^2 = 1$). Le facteur de qualité du circuit est $Q = R/L\omega_p$ où la résistance R inclut, pour l'essentiel, la résistance de rayonnement calculée dans la question I.B.6.

III.B.1) Calculer l'impédance complexe Z du circuit (R, L, C) et montrer que pour des pulsations ω telles que $\Delta\omega = \omega - \omega_p \ll \omega_p$, elle peut s'écrire $Z(j\omega) = R/(1 + j2Q\Delta\omega/\omega_p)$. En déduire les expressions du module $Z = |Z|$ et de l'argument $\varphi = \arg(Z)$.

III.B.2) En déduire, que la tension $v'(t)$ à la sortie de l'amplificateur est $v'(t) = V_p'[1 + m' \cos(\omega_m t + \varphi')] \cos(\omega_p t)$, expression dans laquelle on explicitera V_p' , φ' et le nouvel indice de modulation m' . Commenter l'expression de $v'(t)$ obtenue.

Amplitude

Figure 6



$g = \text{gain entre l'intensité de sortie et la tension d'entrée}$

III.B.3) À quelles conditions le signal amplifié $v'(t)$ est-il une image non déformée du signal modulé $v(t)$, lorsque la pulsation ω_m du signal de modulation varie entre ω_{m1} et ω_{m2} ? Vérifier que ces conditions sont réalisées lorsque $\omega_m/\omega_p \ll 1/(2Q)$.

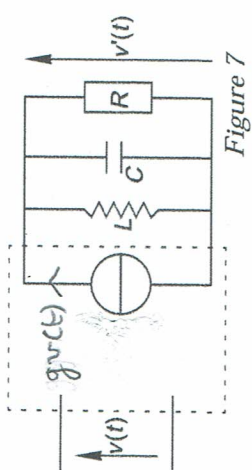


Figure 7

Partie IV - Démodulation

IV.A - L'antenne du récepteur capte un signal modulé qui est appliqué à l'entrée d'un amplificateur à commande automatique de gain (CAG), c'est-à-dire que ce signal sera d'autant plus amplifié que son amplitude au niveau de l'antenne est plus faible. L'amplificateur délivre un signal de la forme $v''(t) = V''_p(1 + m' \cos \omega_m t) \cos \omega_p t$ avec V''_p constante par CAG. Ce dernier signal est ensuite appliqué à l'entrée d'un démodulateur dont le rôle est de fournir un signal $v_d(t)$ image du signal de modulation $v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$. Le démodulateur (figure 8) comprend un oscillateur local délivrant un signal $v_0(t) = V_0 \cos \omega_p t$ synchrone de la porteuse, un multiplieur de constante multiplicative k , un filtre passe-bas F_1 idéal d'amplification $K_1 = 1$ pour $f \leq f_p$ et un filtre F_2 dont l'amplificateur opérationnel est idéal.

IV.A.1) Déterminer la fonction de transfert $H_2(j\omega)$ du filtre F_2 . Quel est le type de ce filtre? Quelle est l'amplification K_2 de ce filtre en bande passante? Calculer R pour avoir une fréquence de coupure à $f_{m1}/10$ sachant que $C = 100 \text{ nF}$. Quel est le rôle de l'amplificateur opérationnel? Tracer le diagramme de Bode (courbe de réponse en gain et courbe de réponse en phase) de F_2 .

IV.A.2) Établir l'expression du signal démodulé $v_d(t)$ à la sortie du filtre F_2 .

IV.A.3) On isole à l'aide d'un soustracteur la composante continue u du signal $u(t)$ en utilisant les signaux délivrés par les filtres F_1 et F_2 . Exprimer u . Quel renseignement nous fournit cette composante continue et à quoi peut-on l'utiliser?

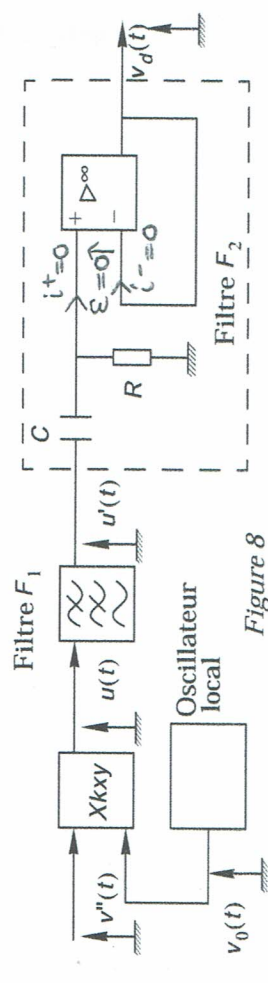


Figure 8

On indique que l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire