

Forces centrales

Travail à rendre le jeudi 1^{er} octobre.

Exercice 1 : Déviation électrostatique d'un noyau

L'expérience de Rutherford réalisée en 1911 révéla la structure lacunaire de la matière. Rutherford interposa, entre une source radioactive émettant des particules alpha (noyaux d'hélium) et un détecteur de particules, une mince feuille d'or de $0,5 \mu\text{m}$ d'épaisseur. Il constata que quelques particules seulement étaient déviées alors que la plupart d'entre elles traversaient la feuille d'or dans l'espace vide sans modification de leur trajectoire.

On étudie une particule M de masse m en mouvement dans un référentiel $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ galiléen.

Ce mouvement est dû à un champ de force central newtonien de centre de force O : $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r$

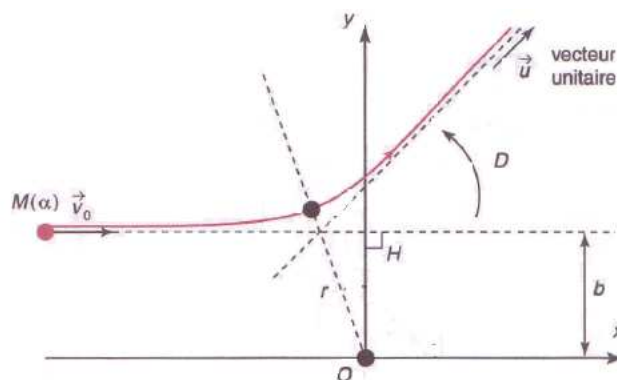
avec $u_r = \frac{\vec{OM}}{OM}$ et $K > 0$.

On introduit le vecteur de Runge-Lenz $\vec{R}$ pour retrouver certaines caractéristiques de la trajectoire : $\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{L}_0 + K \vec{u}_r$ avec $\vec{L}_0$ moment cinétique de la particule calculé par rapport à O.

- 1) Montrer que le vecteur de Runge-Lenz est un invariant du mouvement.
- 2) Effectuer le produit scalaire $\vec{R} \cdot \vec{OM}$. En déduire l'équation polaire de la trajectoire $r(\theta) = \frac{p}{-1 + e \cos \theta}$ où θ représente l'angle entre $\vec{R}$ et $\vec{OM}$, p le paramètre de la conique et e son excentricité.

Une particule incidente alpha de masse m et de charge $q = 2e$ est émise à l'infini avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ et se dirige vers un noyau cible placé en O, fixe dans R et de charge $Q = Ze$.

Sous l'effet de la force coulombienne répulsive, la particule a subi une déviation repérée par l'angle D. La distance entre le support de la vitesse initiale et la droite passant par O parallèle à v_0 est le paramètre d'impact b.



- 3) Etablir l'expression de l'angle de diffusion $D = (\vec{u}_x, \vec{u})$: $\tan \frac{D}{2} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mbv_0^2}$

Exercice 2 : Effet de la pression de radiation sur la trajectoire d'un satellite muni d'une voile solaire

La lumière exerce une pression sur les surfaces qu'elle éclaire. En adjoignant une vaste voile réfléchissante à un satellite, ce mécanisme permet d'utiliser la pression exercée par la lumière du Soleil pour la navigation spatiale. On étudie dans cet exercice l'effet de la pression de rayonnement sur un satellite en orbite autour du Soleil.

- 1) Le satellite de masse m est en mouvement circulaire uniforme de rayon R_1 autour du Soleil de masse M_s . Déterminer l'expression de sa vitesse v_1 . On note G la constante de gravitation universelle.

On considère une onde électromagnétique plane, progressive et harmonique se propageant dans le vide et se réfléchissant sous incidence normale sur un métal immobile modélisant la voile solaire.

Une onde électromagnétique plane, progressive et harmonique dans le vide peut être décrite par des corpuscles appelés photons, qui se déplacent à la vitesse de la lumière c dans le sens de propagation de l'onde. La réflexion de l'onde sur le conducteur s'interprète alors comme le rebond des photons sur la surface du conducteur.

La quantité de mouvement d'un photon est $\hbar \vec{k}$, où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde et $\hbar$ une constante universelle. L'énergie d'un photon est $\hbar \omega$, où ω est la pulsation de l'onde.

La puissance totale rayonnée par le Soleil est notée P_{Soleil} .

- 2) Exprimer le nombre de photons qui impactent une surface élémentaire de voile $\delta \Sigma$ pendant un intervalle de temps dt à une distance r du Soleil.
3) Montrer que la force résultante due aux chocs des photons sur la paroi peut se mettre sous la forme

$$F_p(r) = \frac{K}{r^2}. \text{ Préciser l'expression de } K.$$

On supposera que ce résultat reste valable si la voile est en mouvement.

A l'instant $t = 0$, le satellite initialement en orbite circulaire de rayon R_1 déploie sa voile solaire. On considère qu'elle est en permanence orientée vers le Soleil.

- 4) Déterminer pour quelle valeur σ_c de la masse surfacique de la voile $\sigma = m/S$ l'attraction solaire compense exactement la pression de rayonnement sous incidence normale. On confondra la masse de la voile et celle de l'ensemble voile-satellite.
5) Exprimer l'énergie mécanique du satellite pour $t > 0$ en faisant apparaître une énergie potentielle effective.
6) Distinguer les différentes trajectoires possibles selon les valeurs du rapport σ/σ_c et représenter sur un même schéma l'orbite initiale et les trajectoires correspondant aux différents cas possibles pour $t > 0$.