

RECAPITULATIF DE DYNAMIQUE DES SYSTEMES

1- SYSTÈME CONSTITUÉ D'UN ENSEMBLE DE POINTS MATÉRIELS

a- Centre de masse ou centre d'inertie

Le centre de masse d'un système d'un ensemble de points matériels M_i de masse m_i est le barycentre du système composé des points M_i affectés de la masse m_i .

Ce barycentre G est défini par : $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

Ou par : $m\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$ en notant $m = \sum_i m_i$ la masse totale du système.

b- Quantité de mouvement du système et théorème de la résultante cinétique

En dérivant la relation précédente par rapport au temps, on obtient : $\overrightarrow{p_{syst}} = \sum_i \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{p_G}$

en notant $\overrightarrow{p_G}$ la quantité de mouvement d'un point situé en G et affecté de la masse totale du système.

En sommant les principes fondamentaux de la dynamique appliqués à chacun des points du système, on obtient le théorème de la résultante cinétique :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{p_{syst}}}{dt} \right)_R = \sum \overrightarrow{F_{ext}} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\overrightarrow{p_G}}{dt} \right)_R = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

avec $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ somme des forces extérieures au système s'exerçant sur les points M_1 et M_2 .

La somme des forces intérieures au système est nulle.

c- Moment cinétique du système et théorème du moment cinétique

En sommant les moments cinétiques de chacun des points M_i par rapport à un point O, on obtient le moment cinétique du système par rapport à O :

$$\overrightarrow{\sigma_{syst/O}} = \sum_i \overrightarrow{\sigma_{i/O}} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{p_i}$$

En sommant les théorèmes du moment cinétique appliqué à chacun des points M_i par rapport à un point O fixe, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_{syst/O}}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{F_{ext}/O}}$$

La somme des moments des forces intérieures au système est nulle.

d- Energie cinétique du système et théorèmes énergétiques

$$E_{\text{Csyst}} = \sum_i E_{\text{ci}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Si on somme les théorèmes de l'énergie cinétique appliqués à chacun des points M_i du système on obtient :

$$dE_C = \sum \delta W_{\text{ext}} + \sum \delta W_{\text{int}}$$

avec $\sum \delta W_{\text{ext}} + \sum \delta W_{\text{int}}$ somme des travaux élémentaires de toutes les forces intérieures et extérieures s'exerçant sur chacun des points du système.

En sommant les théorèmes de l'énergie mécanique appliqués aux points M_i :

On obtient :

$$\frac{dE_{\text{msyst}}}{dt} = \sum P_{\text{NCext}} + \sum P_{\text{NCint}}$$

avec $\sum P_{\text{NCext}} + \sum P_{\text{NCint}}$ somme des puissances des forces non conservatives intérieures ou extérieures appliquées aux points M_i du système.

e- Théorèmes de Koenig (MPI*)

Si on connaît le mouvement du système dans le référentiel barycentrique R^* , les théorèmes de Koenig permettent alors d'en déduire le mouvement du système dans un référentiel R donné (composition des mouvements).

- Pour l'énergie cinétique :

Dans un référentiel R :

$$(E_{\text{Csyst}})_R = \frac{1}{2} m_{\text{tot}} (v_G)_R^2 + (E_{\text{Csyst}})_{R^*}$$

- Pour le moment cinétique :

Dans un référentiel R :

$$\left((\vec{\sigma}_O)_{\text{syst}} \right)_R = m_{\text{tot}} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{v}_G)_R + \left((\vec{\sigma})_{\text{syst}} \right)_{R^*}$$

2- SYSTEME SOLIDE

A notre échelle, la matière est continue. On peut donc introduire une masse volumique $\rho(M)$ définie localement (échelle mésoscopique) en tout point M du système.

On peut alors écrire : $\iiint_V \delta m \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ ou $\iiint_V \delta m \overrightarrow{OM} = m \overrightarrow{OG}$ avec $\delta m = \rho(M) \delta V$

a- Éléments cinétiques

$$\overrightarrow{p}_{\text{syst}} = \iiint_V \delta m \overrightarrow{v}_M = m \overrightarrow{v}_G$$

$$E_{\text{Csyst}} = \iiint_V \frac{1}{2} \delta m v_M^2$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{\text{syst}/O} = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}_M = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \delta m \overrightarrow{v}_M$$

b- Théorèmes

Les théorèmes énoncés pour les systèmes de points matériels sont valables pour les solides sous la forme d'une somme continue avec une simplification pour les théorèmes énergétiques :

Dans le cas d'un système rigide (solide), seuls les travaux des forces extérieures interviennent.

c- Equilibre d'un solide

Pour qu'un solide soit en équilibre, il faut qu'il ne soit animé d'aucun mouvement

$\Rightarrow$ Pas de translation : $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et quantité de mouvement nulle (et donc vitesse du barycentre nulle) ;

$\Rightarrow$ Pas de rotation : $\sum \overrightarrow{M}_{\text{ext}} = \vec{0}$ et moment cinétique nul.

d- Cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Si la liaison pivot permettant de guider la rotation autour de l'axe est parfaite alors le moment des forces de frottement au niveau de la liaison est nul.

En sommant les énergies cinétiques de chacun des points M du système qui sont tous animés de la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$, on obtient :

$$E_{\text{Csolide}} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

En sommant les moments cinétiques de chacun des points M du système, on obtient :

$$\sigma_{\Delta(\text{solide})} = J_{\Delta} \dot{\theta}$$

La puissance d'une force s'exerçant sur ce solide en rotation peut se mettre sous la forme :

$$P_{\vec{F}} = M_{\Delta \vec{F}} \omega$$