

I. Satellites sur orbite circulaire

1) * PFD appliqué au satellite ds le référentiel géocentrique:

$$M_s \vec{a} = - \frac{G M_s M_T}{(R_T + R)^2} \vec{e}_r \quad \text{avec } \vec{a} = - (R_T + R) \ddot{\theta} \vec{e}_r + (R_T + R) \dot{\theta}^2 \vec{e}_\theta$$

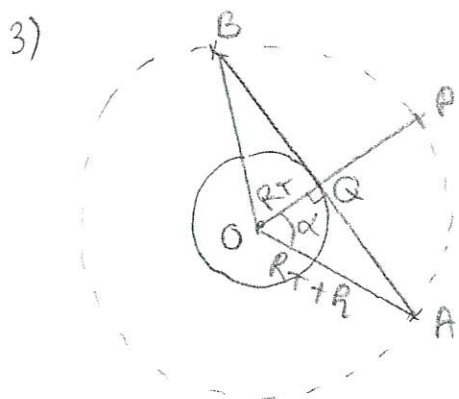
* Projection / $\vec{e}_r$: $\frac{v^2}{(R_T + R)} = \frac{G M_T}{(R_T + R)^2}$ donc $v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + R}}$

* Projection / $\vec{e}_\theta$: $\ddot{\theta} = 0$ donc $\dot{\theta} = \text{cte}$ vitesse uniforme

$$v = \frac{2\pi(R_T + R)}{T} = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + R}}$$

donc $\frac{T^2}{(R_T + R)^3} = \frac{4\pi^2}{G M_T}$ 3^e Loi de Kepler

$$\left. \begin{aligned} * E_c &= \frac{1}{2} M_s v^2 = \frac{1}{2} M_s \frac{G M_T}{R_T + R} \\ * E_p &= - \frac{G M_s M_T}{R_T + R} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} E_c &= -\frac{1}{2} E_p \\ \text{sat } 2E_c + E_p &= 0 \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} T &\leftrightarrow 2\pi \\ \tau &\leftrightarrow 2\alpha \end{aligned} \right\} \text{donc } \tau = \frac{\alpha}{\pi} T$$

$\Rightarrow$ il faut déterminer α

$$G r \cos \alpha = \frac{R_T}{R_T + R} \quad \text{et} \quad \frac{T^2}{(R_T + R)^3} = \frac{4\pi^2}{G M_T}$$

$$\text{d'où } \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{G M_T}} \times (R_T + R)^{3/2} \times \frac{1}{\pi} \times \arccos\left(\frac{R_T}{R_T + R}\right)$$

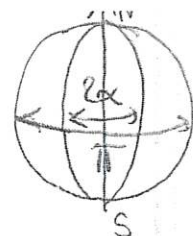
AN $\tau = 2 \sqrt{\frac{(7200 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^4}} \times \arccos\left(\frac{6400}{7200}\right)$

$$\tau = 919 \text{ s} \approx 15 \text{ min.}$$

4) * $N = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil = \lceil 6,6 \rceil = 7$

* Il faut que ces orbites polaires soient séparées de moins de 2 sur π .

Il en faut donc $N' = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil = 4$ car un même train de satellites couvre 2^4 méridiens de Terre.
 $\Rightarrow$ il faut $N \times N' = 28$ satellites.



(2)

- 5) Un satellite géostationnaire tourne à la même vitesse angulaire sur son orbite que la Terre sur elle-même. Son orbite est dans le plan de l'équateur.

On a donc $T_{\text{géostationnaire}} = 24h$

$$\text{et } \frac{T_{\text{géostationnaire}}^2}{(R_T + R_{\text{geo}})^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\text{donc } R_{\text{geo}} = \left(\frac{T_{\text{geo}} \times GM_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T$$

AN $R_{\text{geo}} = 36\,000 \text{ km.}$

Un tel satellite est fixe par rapport à la Terre
 $\rightarrow$ pas de notion de visibilité. On le voit toujours ou jamais depuis un point sur Terre.

- * Les satellites géostationnaires sont à une altitude élevée
 $\Rightarrow$ surcoût énergétique au lancement mais zone couverte plus grande
- * $\oplus$ leur orbite est dans le plan de l'équateur $\Rightarrow$ ne peuvent pas couvrir les régions polaires.
- * Altitude élevée $\Rightarrow$ communication plus difficile
- * Couvrant une zone fixe $\Rightarrow$ communication plus facile avec un point sur Terre sans devoir changer de satellite.

6) $\vec{p} \propto \vec{\alpha} = -\alpha M_S \underbrace{v \vec{v}}_{\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}} \Rightarrow \alpha \text{ a la dimension de l'inverse d'une longueur.}$
 $\uparrow$
 kg ms^{-2}

* Théorème du viriel : $2E_p + E_p = 0$ mouvement circulaire en toute rigueur

$$\begin{aligned} * \text{TPC } \frac{dE_c}{dt} &= P_{F_{gT}} + P_{F_a} \\ \frac{dE_c}{dt} &= - \frac{dE_p}{dt} - \alpha M_S v^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ on suppose ici que le mouvement reste proche d'un mouvement circulaire cad que $\frac{dR}{R} \ll 1$ en une période de révolution.

$$\text{soit } \frac{1}{2} \frac{dE_p}{dt} = -\alpha M_S v^3$$

$$\text{avec } E_p = \frac{-GM_T M_S}{(R_T + A)}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \left(\frac{GM_T M_S}{(R_T + R)^2} \right) \frac{dR}{dt} = - \alpha M_S \frac{(GM_T)^{3/2}}{(R_T + R)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R_T + R}} \times \frac{dR}{dt} = - \alpha M_S \sqrt{GM_T}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{R_T + R}} \times \frac{dR}{dt} = - 2\alpha \sqrt{GM_T}}$$

$$7) \quad \alpha = \frac{-1}{2 \sqrt{GM_T}} \times \frac{1}{\sqrt{R_T + R}} \frac{R(t+T) - R(t)}{T}$$

$$= - \frac{1}{2 \sqrt{GM_T} (R_T + R)} \times \frac{R(t+T) - R(t)}{2\pi (R_T + R)^{3/2}} \times \sqrt{GM_T}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{-\Delta R}{4\pi (R_T + R)^2} = 1,535 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}}$$

$$\text{AN } \alpha = \frac{1}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 7200^2 \times 10^6} =$$

m⁻¹

$$* \text{ Au bout de } t_{10} = 10 \text{ ans : } \int_0^{R_{10}} \frac{dR}{\sqrt{R_T + R}} = \int_0^{t_{10}} - 2\alpha \sqrt{GM_T} dt$$

$$\text{soit } \left[\sqrt{R_T + R} \right]_0^{R_{10}} = - 2\alpha \sqrt{GM_T} \times t_{10}$$

$$\sqrt{R_T + R_{10}} - \sqrt{R_T + R_0} = - 2\alpha \sqrt{GM_T} \times t_{10}$$

$$R_T + R_{10} = (\sqrt{R_T + R_0} - 2\alpha \sqrt{GM_T} t_{10})^2$$

$$\boxed{R_{10} = (\sqrt{R_T + R_0} - 2\alpha \sqrt{GM_T} t_{10})^2 - R_T}$$

$$\text{AN : } \boxed{R_{10} = 748,08 \text{ km}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta R_{10} = -51,92 \text{ km}}$$

* Si on considère une variation circulaire de l'excentricité au cours du temps: $R_{10} = R_0 - \alpha t_{10}$

$$\text{AN } \boxed{R_{10} = 748 \text{ km}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta R_{10} = 52 \text{ km}} \Rightarrow \text{ce calcul approché suffit}$$

* $E_m(t)$ diminue à cause des frottement: $\frac{dE_m}{dt} = - \alpha M_S v^3$

$$E_m(t) = - \frac{1}{2} M_S \frac{GM_T}{(R_T + R)} \quad \text{avec } R(t) \text{ qui } \downarrow$$

Mais $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + R}}$ augmente.

$$8. \alpha(R) = \frac{\gamma}{R^\beta}$$

(4)

* A $R_1 = 800 \text{ km}$ d'altitude on a calculé $\alpha(R_1) = 1,535 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}$

* A $R_2 = 400 \text{ km}$ d'altitude ; $\alpha(R_2) = \frac{-\Delta R_2}{4\pi(R_T + R_2)^2}$

$$= \frac{+2}{4\pi(6800 \cdot 10^3)^2}$$

$$= 3,4 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}$$

* On a $\frac{\alpha(R_1)}{\alpha(R_2)} = \frac{\gamma}{R_1^\beta} \cdot \frac{R_2^\beta}{\gamma} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^\beta$

soit $\ln\left(\frac{\alpha(R_1)}{\alpha(R_2)}\right) = \beta \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

ou $\beta = \frac{\ln\left(\frac{\alpha(R_1)}{\alpha(R_2)}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ AN $\beta = 1,15$

* $\gamma = \alpha(R_1) R_1^\beta = \underline{9,43 \cdot 10^{-9}}$

(5)

II - Stabilisation de l'altitude d'un satellite sur son orbite par gradient de gravité.

Etude dynamique dans le référentiel mobile

- 1) le référentiel mobile n'est pas galiléen car en rotation dans le référentiel géocentrique galiléen.

$$9) \vec{F}_1 = -\frac{G m M_T}{r_1^2} \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = -\frac{G m M_T}{r_2^2} \vec{u}_2$$

en négligeant l'interaction gravitationnelle entre les 2 masses

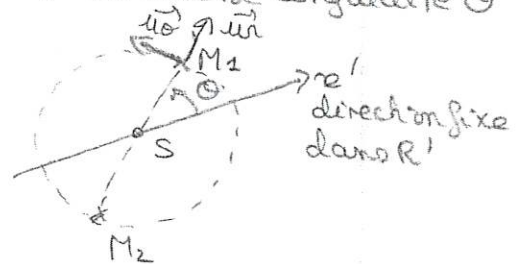
$$10) * \vec{F}_{ic1} = + m \Omega^2 r_1 \vec{u}_2 \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ic2} = m \Omega^2 r_2 \vec{u}_2$$

$$* \vec{F}_{ic1} = -2m \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_{M_1})_{R'} \quad \text{avec } M_1 \text{ qui décrit une trajectoire circulaire de rayon } \ell \text{ dans } R' \text{ à la vitesse angulaire } \dot{\theta}$$

$$= -2m \vec{\Omega} \wedge \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$= 2m \Omega \dot{\theta} \ell \vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{F}_{ic1} = 2m \Omega \dot{\theta} \vec{SM}_1}$$



De même $\vec{F}_{ic2} = 2m \Omega \dot{\theta} \vec{SM}_2$

$$11) * \vec{\sigma}_S \vec{F}_{ic1} = \vec{SM}_1 \wedge \vec{F}_{ic1} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{F}_{ic1} \text{ et } \vec{SM}_1 \text{ colinéaires}$$

$$* \text{De même } \vec{\sigma}_S \vec{F}_{ic2} = \vec{0}$$

$$* \sum \vec{\sigma}_S \vec{F}_{ext/S} = \vec{SM}_1 \wedge \left(-\frac{G M_s M_T}{r_{13}^3} + m \Omega^2 \right) \vec{OM}_1$$

$$+ \vec{SM}_2 \wedge \left(-\frac{G M_s M_T}{r_{23}^3} + m \Omega^2 \right) \vec{OM}_2$$

$$\text{Or } \vec{SM}_1 \wedge \vec{OM}_1 = \vec{SM}_1 \wedge (\vec{OS} + \vec{SM}_1)$$

$$= \vec{SM}_1 \wedge \vec{OS}$$

$$= -\ell \times r_0 \sin \theta \vec{u}_3'$$

$$\text{et } \vec{SM}_2 \wedge \vec{OM}_2 = \vec{SM}_2 \wedge (\vec{OS} + \vec{SM}_2)$$

$$= \vec{SM}_2 \wedge \vec{OS}$$

$$= -\vec{SM}_1 \wedge \vec{OS}$$

$$= \ell r_0 \sin \theta \vec{u}_3'$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } \vec{\sigma}_{\vec{F}_{ext}/S} &= - \left(-\frac{G m M_T}{r_1^3} + m \cancel{\Omega^2} \right) \ell r_0 \sin \theta \vec{e}_3' \\
 &\quad + \left(-\frac{G m M_T}{r_2^3} + m \cancel{\Omega^2} \right) \ell r_0 \sin \theta \vec{e}_3', \\
 &= G m M_T \ell r_0 \sin \theta \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \vec{e}_3',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or } r_1^2 &= (r_0 + \ell \cos \theta)^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \\
 &= r_0^2 \left[\left(1 + \frac{\ell}{r_0} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \sin^2 \theta \right] \\
 &= r_0^2 \left[1 + \frac{\ell^2}{r_0^2} + 2 \frac{\ell}{r_0} \cos \theta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } r_1^{-3} &= r_0^{-3} \left[1 + \frac{\ell^2}{r_0^2} + \frac{2\ell}{r_0} \cos \theta \right]^{-3/2} \quad \text{avec } \frac{\ell}{r_0} \ll 1 \\
 &\simeq r_0^{-3} \left[1 - \frac{3\ell}{r_0} \cos \theta \right] \quad \text{à l'ordre 1 en } \frac{\ell}{r_0}
 \end{aligned}$$

$$\text{De même } r_2^{-3} \simeq r_0^{-3} \left[1 + \frac{3\ell}{r_0} \cos \theta \right]$$

$$\text{d'où finalement: } \vec{\sigma}_{\vec{F}_{ext}/S} = G m M_T \ell r_0 \sin \theta \times \frac{1}{r_0^3} \left(-\frac{6\ell}{r_0} \cos \theta \right) \vec{e}_3'$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{\sigma}_{\vec{F}_{ext}/S} = -6 G m M_T \frac{\ell^2}{r_0^3} \sin \theta \cos \theta \vec{e}_3' = \vec{\Gamma}_S}$$

$$12) \text{ TMC au satellite dans } R': \left(\frac{d\vec{L}_{syst}/s}{dt} \right)_{R'} = \vec{\Gamma}_S$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } \vec{L}_{syst}/s &= \vec{SM}_1 \wedge m \left(\frac{d\vec{SM}_1}{dt} \right)_{R'} + \vec{SM}_2 \wedge m \left(\frac{d\vec{SM}_2}{dt} \right)_{R'} \\
 \vec{L}_{syst}/s &= 2 \times m \times \ell^2 \dot{\theta} \vec{e}_3'
 \end{aligned}$$

d'où en projection / $\vec{e}_3'$:

$$2 m \ell^2 \times \ddot{\theta} = -6 G m M_T \frac{\ell^2}{r_0^3} \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{donc } \dot{\theta} = 0 \forall t \quad \text{ou} \quad \boxed{\ddot{\theta} = -3 \frac{G M_T}{r_0^3} \sin \theta \cos \theta}$$

Les positions d'équilibre dans R' sont telles que: $\ddot{\theta} = 0$

donc $\theta = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ (Les configurations $\theta = \pi$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$ sont identiques à $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$)

13) * Si on fait passer θ de 0 à 0^+ alors $\vec{v}_{\text{ext}}/s$ est selon $\vec{e}_1$ ⁽⁺⁾

Le moment de force fait revenir le système vers la position

$\theta = 0 \Rightarrow$ équilibre stable

* Pour θ qui passe de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}^+$: $\vec{v}_{\text{ext}}/s$ selon $+\vec{e}_2$

$\Rightarrow$ le système s'écarte encore plus de $\frac{\pi}{2}$ (vers les θ croissants)

$\Rightarrow$ équilibre instable.

* Pour $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| \ll 1$: $\sin(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) = \cos \varepsilon$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) = -\sin \varepsilon$$

d'où $\varepsilon'' = +3 \frac{GM_T}{r_0^3} \cos \varepsilon \sin \varepsilon$

soit $\boxed{\varepsilon'' - 3 \frac{GM_T}{r_0^3} \varepsilon(t) = 0}$ coefs de l'équation différentielle de signes différents
 $\Rightarrow$ instabilité

14) De même autour de la position d'équilibre stable :

$$\varepsilon'' + 3 \frac{GM_T}{r_0^3} \varepsilon(t) = 0$$

Oscillateur harmonique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{3GM_T}}$

AN $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 7200^3 \cdot 10^9}{3 \times 66710^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}} = 3503 \text{ s}$

B) X MP 1993 (extra)

Situation pour laquelle $p_2 - p_0 > 0$



1) $\vec{T} = T \vec{e}_x$ avec T algébrique
On a $T \cdot \vec{e}_x \cdot \vec{e}_R < 0$ puisque la vitesse de glissement est la vitesse de la brique.

- A l'équilibre, la phase du centre d'inertie s'écrit:

$$\vec{Q} = T + N + P + F \quad \text{ou } F \text{ est la force exercée par la brique sur la rampe.}$$

En projetant sur ox :

$$T + P \cos \theta + R(p_2 - p_0) = 0$$

x est la déformation du ressort d'où $p_2 - p_0 = -x$

d'où $T + P \cos \theta - R x = 0$

En projetant sur oy :

$$N - P \sin \theta = 0$$

$$|T| \leq \mu_s N \Rightarrow |R x - P \cos \theta| \leq \mu_s P \cos \theta$$

$$\text{i.e. } -\mu_s P \cos \theta + P \cos \theta \leq R x \leq \mu_s P \cos \theta + P \cos \theta$$

$$\text{soit } \left| \frac{1}{R} (P (-\mu_s \cos \theta + \mu_s \cos \theta)) \right| x \leq \frac{1}{R} P (\mu_s \cos \theta + \mu_s \cos \theta)$$

$$\text{Si } \theta = 0 \quad \left| \frac{\mu_s P}{R} \leq x \leq \frac{\mu_s P}{R} \right.$$

$$\text{Si } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \left| x = \frac{P}{R} \right. \quad (N=0, T=0)$$

2) a) Initialement $\theta_0 = 0$ et $x_0 = 0$ (ressort détendu).

La brique glisse donc que $-\mu_s \cos \theta + \mu_s \sin \theta = 0$, d'où l'inégalité obtenue au 1)

$$\text{D'où } \theta_1^+ = \arctan(\mu_s)$$

Tant que la brique glisse, $T=0$ car on suppose $ad=0$.

On suppose aussi que les frottements visqueux peuvent intervenir à l'équilibre. Donc la brique va s'immobiliser pour $P \sin \theta - R x = 0$ i.e. $x_1^+ = \frac{P}{R} \sin \theta_1^+$ (le ressort est comprimé)

b) La brique se trouve donc en x_1^+ est on augmente θ à partir de θ_1^+ .

Il y a équilibre tant que $\frac{P}{R} (-\mu_s \cos \theta + \mu_s \sin \theta) \leq x_1^+$

car on a nécessairement $x_1^+ = \frac{P}{R} \sin \theta_1^+ \leq \frac{P}{R} (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$ pour $\theta_1^+ \leq \theta$.

Donc la rupture d'équilibre ne peut pas:

$$x_1^+ = \frac{P}{R} (-\mu_s \cos \theta_1^+ + \mu_s \sin \theta_1^+)$$

$$\text{soit } \left| \sin \theta_1^+ = \sin \theta_1^+ - \mu_s \cos \theta_1^+ \right.$$

c) A chaque fois, on aura équilibre tant que $\frac{P}{R} (-\mu_s \cos \theta + \mu_s \sin \theta) \leq x_1^+$ avec $\theta \geq \theta_1^+$;

donc si θ_{i+1} est la $x_i^+ = \frac{P}{R} (-\mu_s \cos \theta_i + \mu_s \sin \theta_i)$

alors on a équilibre en x_i^+ pour $\theta \in [\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$

Pendant la phase de glissement, $T=0$, donc on a

encore pour chaque équilibre $P \sin \theta_i^+ = R x_i^+$

D'où la relation $\left| \sin \theta_i^+ = \sin \theta_{i+1}^+ - \mu_s \cos \theta_{i+1}^+ \right.$

car $\cos \theta_{i+1} \rightarrow 0$ donc $\sin \theta_{i+1} - \mu_s \cos \theta_{i+1} \rightarrow 0$ i.e. $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+ \rightarrow 0$

3) D'après la question 1) $z_0 = \frac{p}{R}$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$

Il n'y a pas de glissement (circulaire) tant que l'inégalité toujours vérifiée

$$\frac{p}{R} (\sin \theta \cos \theta) \leq z_0 \leq \frac{p}{R} (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta)$$

Donc on a θ_1 tel que $1 - \sin \theta_1 + \sin \theta_1$

La phase de glissement se fait toujours avec $T = 0$ mais l'accélération verticale permet d'écrire $z_1 = \frac{p}{R} \sin \theta_1$

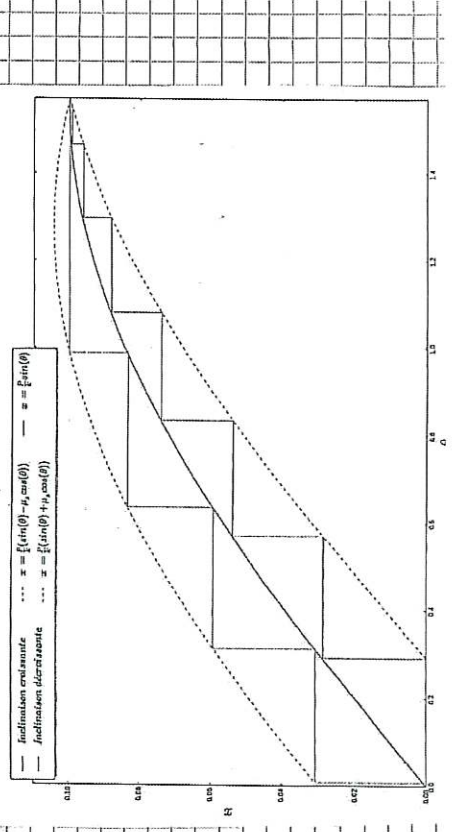
Il y a une nouvelle glissement pour : $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 + \sin \theta_2$

On en déduit la relation $\sin \theta_2 = \sin \theta_1 + \sin \theta_1$ avec des angles $[\theta_1, \theta_2]$ d'équilibre en θ_1 .

On a $\theta_{i+1} - \theta_i = \alpha$

4) z_i et z_{i+1} sont situés sur la courbe d'équilibre $z_i = \frac{p}{R} \sin \theta_i (1)$

- z_i et θ_{i+1} sont sur la courbe $z_i = \frac{p}{R} (\sin \theta_i + \sin \theta)$
- z_{i+1} et θ_{i+1} sont " " $z_{i+1} = \frac{p}{R} (\sin \theta_i + \sin \theta)$



Secours (Péres 2001)

1) $\vec{F} = m \alpha t \vec{i}$

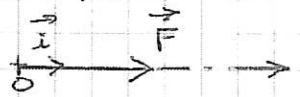
$$[F] = \text{kg m s}^{-2}$$

$$[m t] = \text{kg s}$$

donc $[\alpha] = \text{m s}^{-3} = \left[\frac{da}{dt} \right]$

donc α a bien la dimension d'une secousse.

2) La vitesse de glissement de l'amiète par rapport à la nappe s'écrit $\vec{v}_g = \vec{v}_{\text{amiète}} R_g - \vec{v}_{\text{nappe}} R_g$
à $t=0^+$, l'amiète est encore immobile alors que l'on tire la nappe vers la droite selon $\vec{i}$ (sens de $\vec{F}$).

Donc $\vec{v}_g(t=0^+) = -\vec{v}_{\text{nappe}} R_g(t=0^+)$ 
soit $\vec{v}_g \cdot \vec{i} < 0$ à $t=0^+$

3) On applique la relation fondamentale de la dynamique à l'amiète, dans R_g galiléen.

Les forces appliquées sont :

- le poids $m\vec{g}$
- la réaction du support
↳ $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ réaction normale
force de frottement

$$M \vec{a}_{R_g} = M \vec{g} + \vec{T} + \vec{N} \quad ; \quad x_a \text{ repère le centre de masse de l'amiète.}$$

En projetant sur $\vec{i}$: $M \ddot{x}_a = T$

où $T = \vec{T} \cdot \vec{i}$. Comme $\vec{v}_g \cdot \vec{i} < 0$ alors $\vec{T} \cdot \vec{i} > 0$, ceci pour tout t .

En projetant sur la verticale : $0 = N - M g$, $N = \| \vec{N} \|$.

Loi de Coulomb lors du glissement : $\| \vec{T} \| = f \| \vec{N} \|$

D'où $M \ddot{x}_a = f M g$ soit $\ddot{x}_a = f g = cte$

$x_a(t) = \frac{1}{2} f g t^2$ (à $t=0$, $x_a=0$ et $\dot{x}_a=0$).

4) On applique la relation fondamentale de la dynamique dans R_g galiléen à la nappe :

les forces appliquées sont : $\vec{F} = m \alpha t \vec{i}$, d'après le principe de l'action-réaction : $-\vec{R} = -\vec{T} = \vec{N}$: action de l'assiette sur la

le poids $m\vec{g}$ et $\vec{N}'$ action de la ^{nappe} table _{sur la nappe}.
 $m \vec{a}_{Rg} = \vec{F} - \vec{N} + \vec{N}' - \vec{T} + m\vec{g}$ (on néglige les frottements)

Sur la verticale $\vec{N} = \vec{N}' - m\vec{g}$

Sur $\vec{i}$: $m \vec{a}_m = m \alpha t - f M g$

$$x_m = \frac{1}{6} \alpha t^3 - \frac{1}{2} f g t^2 \frac{M}{m}$$

$$R(t) = \frac{1}{6} \alpha t^3 - f g \frac{M}{m} \frac{t^2}{2}$$

5) La densité de contact τ correspond à $(x_m - R)/\tau = r$ alors que $x_m(0) = 0$, en considérant l'assiette fixe.

D'où $x_m(\tau) = R(\tau) = r + R$

$$x_a(\tau) = \frac{1}{2} f g \tau^2$$

$$R(\tau) = \frac{1}{6} \alpha \tau^3 - \frac{M}{m} x_a(\tau)$$

En considérant $\frac{M}{m} x_a(\tau) \ll \frac{1}{6} \alpha \tau^3$,

$$\text{on a } \frac{1}{6} \alpha \tau^3 = r + R \text{ soit } \alpha = \frac{6(r+R)}{\tau^3}$$

$$\text{A.N. : } \alpha = \frac{6 \times 0,3}{10^{-3}} \text{ soit } \underline{d = 1800 \text{ m.p}^{-3}}$$

$$F = m \alpha t = 0,05 \times 1800 \times 0,1 = \underline{9 \text{ N}}$$

F correspond à une masse de 9 kg (pour un poids de 9 N), cela risque d'être difficile pour un enfant.

6) $0 \leq t < t_1$: phase "collée"

Pour la masse : $m \ddot{x}_m = -T + F$ où $T = \|\vec{T}\|$.

$$m \ddot{x}_m = -T + m \alpha t$$

Pour l'assiette : $M \ddot{x}_a = T$

Pendant la phase "collée", $\ddot{x}_m = \ddot{x}_a$

$$\text{d'où } m \alpha t = (m+M) \ddot{x}_m = (m+M) \ddot{x}_a = (m+M) \frac{T}{M}$$

Cette phase perdure tant que $T < \frac{1}{2} M g$,

$$\text{soit } m \alpha t \frac{M}{M+m} < \frac{1}{2} M g$$

$$\text{ic } t < \frac{\frac{1}{2} g (M+m)}{m \alpha}$$

$$\text{D'où } t_1 = \frac{\frac{1}{2} g (M+m)}{m \alpha}$$

$$\ddot{x}_a = \frac{m \alpha}{M+m} t \quad \text{soit } \ddot{x}_a = \frac{m \alpha}{M+m} \frac{t^2}{2} \quad \text{et } x_a = \frac{m \alpha}{M+m} \frac{t^3}{6}$$

$$x_a(t_1) = \frac{m \alpha}{M+m} \frac{1}{6} \left(\frac{\frac{1}{2} g (M+m)}{m \alpha} \right)^3 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} g \right)^3 \left(\frac{M+m}{m \alpha} \right)^2$$

$$x_a(t_1) = x_m(t_1) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} g \right)^3 \left(\frac{M+m}{m \alpha} \right)^2$$

$$\ddot{x}_a(t_1) = \frac{m \alpha}{M+m} \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} g (M+m)}{m \alpha} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g \right)^2 \frac{M+m}{m \alpha}$$

$$x_a(t_1) = x_m(t_1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g \right)^2 \frac{M+m}{m \alpha}$$

7) $t \geq t_1$: phase "glisse"

D'après 3), $M \ddot{x}_a = \frac{1}{2} M g$ soit $\ddot{x}_a = \frac{1}{2} g$.

$$\ddot{x}_a = f g(t-t_1) + \ddot{x}_a(t_1) = f g(t-t_1) + \underbrace{\frac{1}{2}(f g)^2 \frac{m+m}{m \alpha}}_{\ddot{x}_a(t_1)}$$

$$x_a(t) = \varphi(t-t_1) = \frac{1}{2} f g(t-t_1)^2 + \frac{1}{2} (f g)^2 \frac{m+m}{m \alpha} (t-t_1) + \underbrace{\frac{1}{6} (f g)^3 \left(\frac{m+m}{m \alpha}\right)^2}_{\ddot{x}_a(t_1)}$$

$$\ddot{x}_m = \alpha t - f g \frac{m}{m}$$
 d'après 4).

$$\ddot{x}_m = \frac{1}{2} \alpha (t-t_1)^2 - f g \frac{m}{m} (t-t_1) + \underbrace{\frac{1}{2} (f g)^2 \frac{m+m}{m \alpha}}_{\ddot{x}_m(t_1)}$$

$$x_m(t) = \psi(t-t_1) = \frac{1}{6} \alpha (t-t_1)^3 - \frac{1}{2} f g \frac{m}{m} (t-t_1)^2 + \frac{1}{2} (f g)^2 \frac{m+m}{m \alpha} (t-t_1) + \frac{1}{6} (f g)^3 \left(\frac{m+m}{m \alpha}\right)^2$$

8) $t_c - t_1 = 0,10$.

$$\begin{aligned} (x_m - x_a)(t_c) &= \psi(t_c - t_1) - \varphi(t_c - t_1) \\ &= \frac{1}{6} \alpha (t_c - t_1)^3 - \underbrace{\frac{1}{2} f g (t_c - t_1)^2 \left(\frac{m}{m} - 1\right)}_{2^{\text{nd}} \text{ terme}} \\ &= R + 2 \end{aligned}$$

d'où $\frac{1}{6} \alpha (t_c - t_1)^3 = R + 2$ en négligeant le 2nd terme de vant le premier.

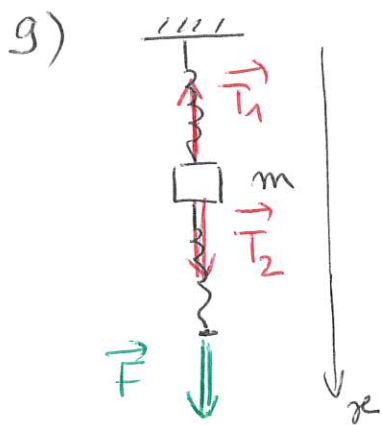
$$\hookrightarrow \alpha = \frac{6(R+2)}{10^{-3}} = 1800 \text{ m.s}^{-3} \text{ comme en 5).}$$

$$t_1 = \frac{f g}{\alpha} \left(1 + \frac{m}{m}\right) = \frac{2}{1800} \left(1 + \frac{400}{50}\right) = \frac{2}{1800} (1+8) = 10^{-2} \text{ s.}$$

Vérification de l'approximation:

$$\frac{1}{6} \alpha (t_c - t_1)^3 = 0,3$$

$$\frac{1}{2} f g \left(\frac{m}{m} - 1\right) (t_c - t_1)^2 = \left(\frac{400}{50} - 1\right) \times 10^{-2} = 7 \cdot 10^{-2} = 0,07 < 0,3$$



Si on tire lentement, succession d'états d'équilibre.
 A tout instant : $T_2 = F$ (équilibre du ressort 2)

et $T_1 = T_2 + mg = F + mg > T_2 \Rightarrow$
 le ressort 1 casse en premier.

Si on tire rapidement, la masse n'a pas le temps de bouger $\Rightarrow$ l'allongement du ressort 2 est plus grand que celui du ressort 1 $\Rightarrow T_2 > T_1$
 $\hookrightarrow$ le ressort 2 casse en premier

10) Ressorts sans masse $\Rightarrow T_2 = F = m\alpha t \quad \forall t$
 PFD appliqué à la masse dans R+ galiléen:

$$m\ddot{x}_1 = mg - kx_1 + m\alpha t$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = g - \alpha t$$

solution générale de l'eq. homogène:

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_{1H}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Solution particulière: } x_{1P}(t) = \frac{mg}{k} - \frac{m\alpha t}{k}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k} - \frac{m\alpha t}{k}$$

$$\text{CI: } x_1(0) = \frac{mg}{k} = A \sin \varphi + \frac{mg}{k} \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 = \omega A - \frac{m\alpha}{k} \Rightarrow A = \frac{m\alpha}{k\omega}$$

$$\text{Finalement: } \boxed{x_1(t) = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)} \quad \text{cqfd}$$

$$11) \boxed{T_2(u) = F(u) = \frac{m\alpha}{\omega} u}$$

$$\boxed{T_1(u) = kx_1 = mg + \frac{m\alpha}{\omega} (u - \sin u)}$$

$$12) \quad \varepsilon = \frac{g\omega}{\alpha}$$

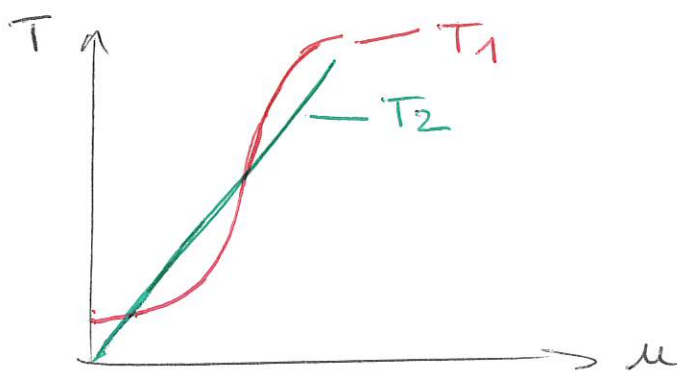
T_2 : fonction linéaire de u : $T_2 = \frac{m\alpha}{\omega} u$

$$T_1 = \frac{m\alpha}{\omega} (\varepsilon + u - \sin u) = T_2 + \frac{m\alpha}{\omega} (\varepsilon - \sin u)$$

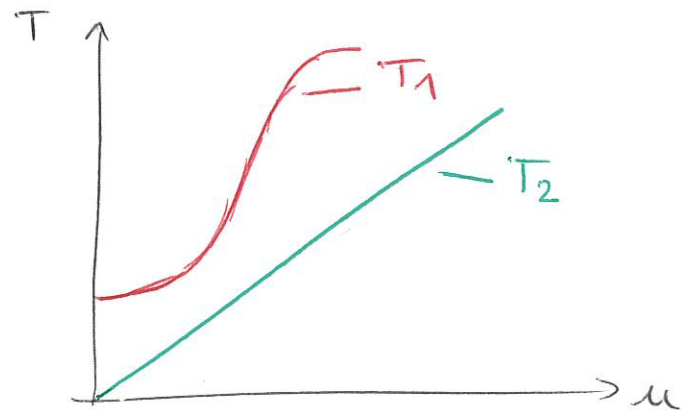
Intersection possible des 2 courbes si $\exists u$ tq

$$\frac{m\alpha}{\omega} u = \frac{m\alpha}{\omega} u + \frac{m\alpha}{\omega} (\varepsilon - \sin u)$$

soit $\boxed{\varepsilon = \sin u} \Rightarrow$ possible si $\boxed{\varepsilon \leq 1}$



$\varepsilon \leq 1$



$\varepsilon > 1$

13) R_1 casse en premier si T_1 atteint la tension de rupture T_r en premier

On est dans le cas où $\varepsilon \leq 1$: $T_1 > T_2$ avant le 1er point d'intersection entre les courbes (pour lequel $u = \arcsin \varepsilon$).

Cas limite : $T_1(\arcsin \varepsilon) = T_r = T_2(\arcsin \varepsilon)$

$$\Rightarrow \boxed{T_r = \frac{m\alpha}{\omega} \arcsin \varepsilon = \frac{mg \arcsin \varepsilon}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{f(\varepsilon) = \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \frac{T_r}{mg} = \frac{kx_r}{mg}$$

14) A.N. $\frac{T_r}{mg} = \frac{kx_r}{mg} = 1,16 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 0,8}$ cf fig 3

15) hypothèses simplificatrices : ressorts de masse nulle, loi de Hooke valable $\forall$ l'allong...