

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 (4h)

- Calculatrice et téléphones portables (ou tout objet connecté) autorisés.
- Utiliser une encre foncée (bleue foncée ou noire).
- L'utilisation d'un correcteur (souris ou autre) est interdite au concours : en cas d'erreur il faut barrer proprement
- On soignera tout particulièrement la qualité de la rédaction.

Ce devoir se compose de 9 pages et comprend trois problèmes complètement indépendants :

- Problème n°1 : Satellites de télécommunication (Mines-Ponts)
- Problème n°2 : Quelques aspects de la physique granulaire (X)
- Problème n°3 : Secousses (Mines-Ponts)

Problème 1 :

Notations : vecteur $\rightarrow \vec{A}$ (gras) ; norme du vecteur $\vec{V} \rightarrow V$ (italique) ; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{a}$.

Dans toute l'épreuve, *exprimer* signifie « donner l'expression littérale » et *calculer* signifie « donner la valeur numérique ».

SATELLITES DE TÉLÉCOMMUNICATION

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

À la fin de cet énoncé (page 7), sont regroupées des valeurs de grandeurs physiques et un formulaire utilisables dans cette épreuve.

I SATELLITES SUR ORBITE CIRCULAIRE

□ 1 – Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). Établir la relation entre la période

de révolution T et h . Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ et h .

□ 2 – Soient E_c et E_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le « théorème du viriel » : $2E_c + E_p = 0$.

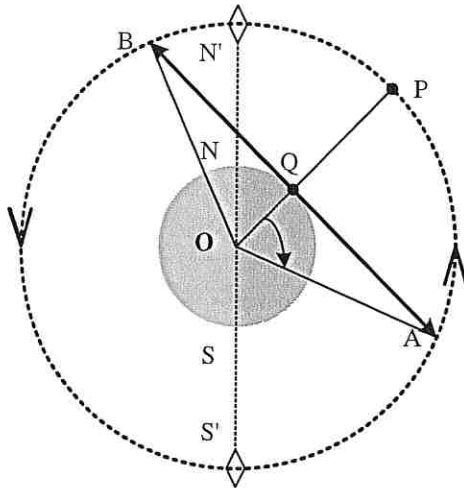


Fig. 1 : Satellite P, point Q et ligne des horizons AB. Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est N'SN'). L'angle est dit ancillaire.

□ 3 – À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. 1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de h , G , M_T et R_T .

Calculer τ pour $h = 8 \times 10^5$ m.

□ 4 – Calculer T/τ . Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de satellites,

identiques, appelé « train de satellites ». Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est à dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

□ 5 – Dans cette question, on prend en compte la rotation de la Terre. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4 ?

□ 6 – La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{f}_a$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{f}_a = -\alpha M_S v \vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α . Écrire le théorème de l'énergie cinétique en supposant que le théorème du viriel établi à la question 2 reste applicable en présence de $\vec{f}_a$. Établir l'équation différentielle vérifiée par h .

□ 7 – Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse

extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte. Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

□ 8 – En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question 7 (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β .

II STABILISATION DE L'ATTITUDE D'UN SATELLITE SUR SON ORBITE PAR GRADIENT DE GRAVITÉ

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les

satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVII^{ème}, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \frac{1}{2}M_s$ reliés par une tige

rigide de masse nulle et de longueur $2l$. Le barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ ($l \ll r_0$). Le référentiel géocentrique (R) lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen. Le plan orbital est Oxy . Le référentiel (R') défini par le repère $(Ox'y'z')$ lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω (Fig. 2). Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital : $\overrightarrow{OS} = r_0 \hat{u}$, $\overrightarrow{OM}_1 = r_1 \hat{u}_1$ et

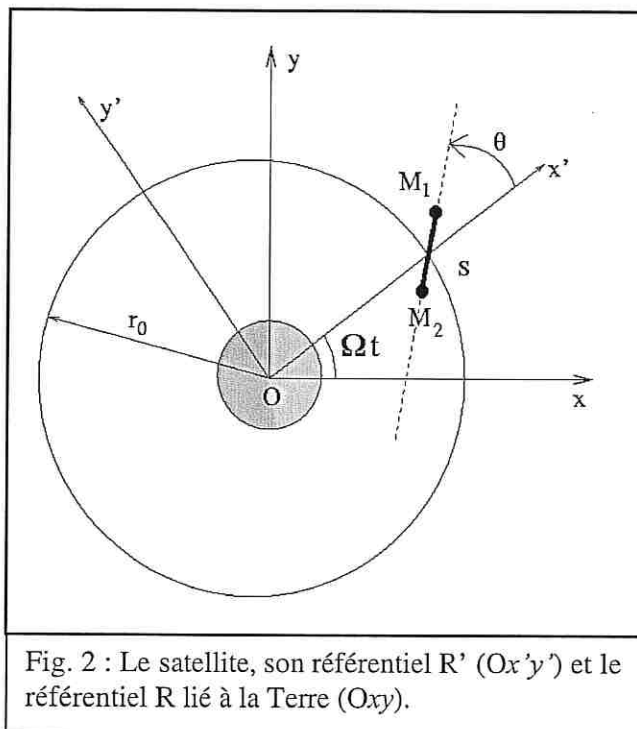


Fig. 2 : Le satellite, son référentiel R' ($Ox'y'$) et le référentiel R lié à la Terre (Oxy).

$\overrightarrow{OM}_2 = r_2 \hat{u}_2$, où $\hat{u}$, $\hat{u}_1$ et $\hat{u}_2$ sont unitaires. On appelle θ l'angle de M_1M_2 avec l'axe Ox' de (R') . On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel (R') et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Étude dynamique, dans le référentiel mobile

□ 9 – Exprimer les forces gravitationnelles $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ qui agissent sur M_1 et M_2 .

□ 10 – Exprimer dans (R') les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur M_1 et M_2 , en fonction de m , Ω , $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$. Exprimer dans (R') les forces d'inertie de Coriolis qui agissent

sur M_1 et M_2 , en fonction de m , Ω , $\overrightarrow{SM_1}$, $\overrightarrow{SM_2}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

□ 11 – Montrer que dans (R') le moment des forces d'inertie de Coriolis en S est nul. Établir que dans (R') le moment résultant calculé en S des actions extérieures a pour amplitude, pour $l \ll r_0$, $\Gamma_S = 6 G m M_T \frac{l^2}{r_0^3} \sin(\theta) \cos(\theta)$. Préciser la direction et le sens de ce moment cinétique de forces.

□ 12 – Appliquer le théorème du moment cinétique dans (R'). Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de θ qui correspondent à une position d'équilibre dans (R').

□ 13 – Montrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Existe-t-il une position d'équilibre instable ? Quelle est la forme de l'équation différentielle pour les petits mouvements autour de cette position d'équilibre instable ?

□ 14 – À partir de la position $\theta = 0$, le satellite subit une petite perturbation qui l'écarte d'un angle θ_0 . Calculer la période des oscillations au voisinage de la position d'équilibre, pour un satellite d'altitude $h = 800$ km. Comparer cette période avec la période du satellite autour de la Terre.

DONNÉES PHYSIQUES

constante de gravitation	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
rayon de la Terre	$R_T = 6400 \text{ km}$
masse de la Terre	$M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
masse du satellite	$M_S = 2,0 \cdot 10^3 \text{ kg}$
perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
vitesse de la lumière	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
masse de l'électron m_e	$m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

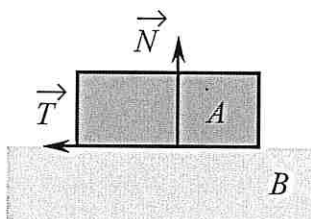
Problème 2 :

Quelques aspects de la physique des milieux granulaires

Un solide granulaire est un matériau composé de particules solides discrètes de taille typique comprise entre 100 et 3 000 μm , et qui restent le plus souvent en contact les unes avec les autres. Cette classe de matériaux comprend les ciments, les sables, les graviers, les granulats, les céréales... On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects, statiques et dynamiques, de la physique de ces systèmes qui reste encore assez mal comprise.

La première partie du problème est indépendante des deux suivantes.

Formulaire



L'action du solide B sur le solide A en contact se décompose en une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ vérifiant :

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\| \quad \text{en l'absence de glissement entre } A \text{ et } B$$

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\| \quad \text{lorsqu'il y a glissement de } A \text{ sur } B.$$

μ_s et μ_d sont appelés coefficients de frottement respectivement statique et dynamique et vérifient l'inégalité : $\mu_d \leq \mu_s$.

Première partie Hystérésis de frottement

Une des difficultés conceptuelles majeures pour la description d'un système comportant du frottement solide est l'impossibilité de prévoir les positions d'équilibre et le bilan des forces à moins de connaître de façon détaillée l'histoire de la mise en équilibre. Le but de cette partie est d'illustrer ce phénomène (dit d'hystérésis) sur un exemple simple.

Une brique parallélépipédique de poids P est en contact avec une paroi solide inclinée d'un angle θ par rapport au plan horizontal et est reliée à un ressort de raideur k (figure 1). Soit μ_s le coefficient de frottement statique ; on supposera pour simplifier que le coefficient de frottement

dynamique μ_d est nul et qu'un frottement visqueux permet l'arrêt du mouvement. On note x la déformation du ressort ($x = 0$ correspond au ressort détendu). On cherche à déterminer cette déformation x à l'équilibre en fonction de l'angle θ .

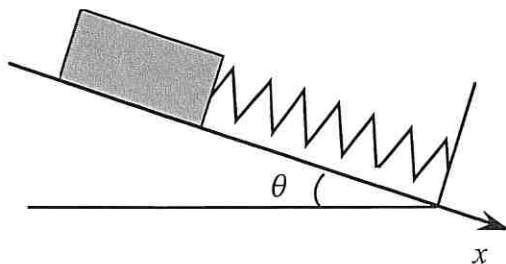


Figure 1

1. Donner les plages de valeurs possibles de x à l'équilibre dans les deux cas extrêmes : $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

2. La paroi est supposée horizontale et le ressort détendu ($x_0 = 0$). On incline progressivement la paroi, l'angle θ variant de 0 à $\pi/2$; on note alors θ^+ les angles d'inclinaison croissants. On désigne par x_i^+ la série des déformations du ressort dans les positions successives de non-glissement de la brique.

a) Déterminer l'angle d'inclinaison θ_1^+ pour lequel le glissement apparaît. Pour cet angle, déterminer la nouvelle valeur d'équilibre x_1^+ en fonction de θ_1^+ , P et k .

b) On augmente l'angle d'inclinaison; un nouveau glissement apparaît pour l'angle θ_2^+ . Établir la relation entre θ_1^+ , θ_2^+ et μ_s .

c) Montrer que pour chaque x_i^+ il existe un intervalle $[\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$ de non glissement; on établira la relation de récurrence liant θ_i^+ et θ_{i+1}^+ . Vers quelle valeur limite tend la différence $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$?

3. On effectue maintenant le parcours inverse en partant de la verticale. On note θ_i^- et x_i^- les angles successifs de glissement et les positions d'équilibre correspondantes.

Étudier comme à la question précédente la succession des valeurs d'arrêt x_i^- .

4. Représenter sur un même graphe du plan (θ, x) les paliers d'arrêt successifs x_i^+ à inclinaison croissante puis x_i^- à inclinaison décroissante; on pourra utiliser le fait que les points (θ_i^+, x_i^+) , (θ_i^-, x_i^-) , (θ_{i+1}^+, x_i^+) et (θ_{i+1}^-, x_i^-) se situent sur des courbes simples. On prendra $P/k = 0, 1$ m et $\mu_s = 0, 3$. Commenter le résultat.

Problème 3 :

- Conventions typographiques : un vecteur est noté en gras ($\mathbf{A}$), sa norme en italique ($\|\mathbf{A}\| = A$).
- Il ne faudra pas hésiter à formuler tout commentaire qui vous semblera pertinent, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

SECOUSSES

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes l'une de l'autre et que l'on pourra traiter dans l'ordre que l'on voudra. Chacune de ces parties fait intervenir la notion, peu courante en mécanique newtonienne, de secousse : on nomme ainsi une quantité α égale à la dérivée temporelle d'une accélération $\mathbf{a}$: $\alpha = \frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

Première partie : SECOUSSES EN MÉCANIQUE

Cette partie présente deux expériences « à une dimension » et indépendantes l'une de l'autre.

Première expérience

Sur le guéridon de la figure 1, recouvert d'une nappe sans ourlet, on place une assiette bien remplie. D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste en place sur le guéridon.

La masse de l'assiette est $M = 400$ g, celle de la nappe est $m = 50$ g. Le guéridon (fig. 2) est modélisé par un disque de centre O et de rayon $R = 25$ cm. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable. L'assiette circulaire, de rayon $r = 5$ cm, est placée au centre de la nappe. On admet que le support de la force F développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par O et que cette force

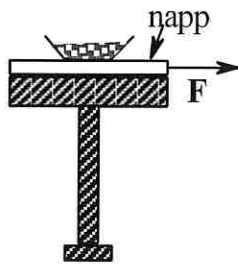


Fig. 1 : assiette, guéridon et nappe

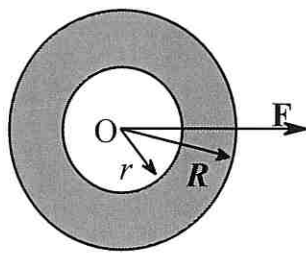


Fig. 2 : nappe et assiette vues de haut

s'écrit, en fonction du temps t , $\mathbf{F} = m\alpha t \mathbf{i}$, où $\mathbf{i}$ est un vecteur unitaire constant et α une constante. Le frottement entre la nappe et le guéridon est négligeable. Le coefficient de frottement de glissement entre la nappe et l'assiette est noté f ($f = 0,2$). Le repère d'espace $R_g(O, \mathbf{i})$ est supposé galiléen. On note g l'accélération de la pesanteur ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

référéntiel

□ 1 – Montrer que α a bien la dimension d'une secousse.

Une première modélisation

□ 2 – On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant $t = 0^+$, le signe de la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe ?

□ 3 – Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans R_g et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre C_a , $x_a = f(t)$.

□ 4 – Déterminer l'équation horaire du mouvement du centre C_n de la nappe, $x_n = h(t)$.

□ 5 – On observe que le déplacement de l'assiette est négligeable et que le contact nappe-assiette dure un temps $\tau = 0,1 \text{ s}$; calculer la valeur de α . La manipulation peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

Une modélisation plus réaliste

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases; dans la première phase, de durée t_1 , l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur fMg donnée par la loi de COULOMB, l'assiette ne glisse pas sur la nappe et $x_a = x_n$. Le contact entre l'assiette et la nappe induit une force tangentielle $\mathbf{T}$ sur l'assiette et donc $-\mathbf{T}$ sur la nappe.

□ 6 – Pour $0 \leq t \leq t_1$, intégrer l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à la nappe puis à l'assiette. Dédurre de ces deux relations la durée de la phase sans glissement t_1 .

Exprimer $x_a(t_1)$, $\left(\frac{dx_a}{dt}\right)_{t=t_1}$, $x_n(t_1)$ et $\left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{t=t_1}$.

□ 7 – Déterminer, pour $t \geq t_1$, et sous la forme de polynômes de la variable $(t - t_1)$, les équations horaires respectives du mouvement de C_a , $x_a = \varphi(t - t_1)$ et de celui de C_n , $x_n = \eta(t - t_1)$.

□ 8 – On observe que le contact nappe-assiette dure $t_c - t_1 = 0,1 \text{ s}$. Calculer la valeur de la secousse (on devrait arriver à l'équation $\alpha(t_c - t_1)^3 = 6(R + r)$); calculer aussi t_1 .

→ on vérifiera a posteriori l'approximation effectuée.

Seconde expérience

Un solide S , de masse m , est accroché au plafond par l'intermédiaire d'un ressort R_1 de masse négligeable et de raideur k . Un second ressort R_2 , identique au premier, pend sous le solide (fig. 3). À l'instant $t = 0$ on tire sur le ressort R_2 . On constate que si l'on tire *lentement*, l'un des ressorts finit par se briser et que si l'on tire *rapidement*, c'est l'autre ressort qui se brise.

□ 9 – Prévoir quel est, dans chacun des cas, le ressort qui se brise.

Première modélisation

□ 10 – La force F appliquée à l'extrémité libre de R_2 s'exprime par $F = m\alpha t$ pour $t > 0$ où α est une constante. La tension T de chaque ressort suit la loi de HOOKE (proportionnalité de la tension à l'allongement), jusqu'à une tension de rupture T_r : $T = kx$ pour $T < T_r$, où x est l'allongement du

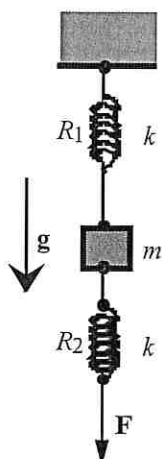


Fig. 3 : deux ressorts

ressort par rapport à sa longueur à vide. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et l'on appelle $x_1(t)$ l'allongement de R_1 . Les conditions initiales étant $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_{t=0} = 0$ et $x_1(0) = \frac{mg}{k}$, déduire du principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S que l'allongement $x_1(t)$ est donné par :

$$x_1 = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k\omega} [u - \sin(u)] \text{ (avec } \omega t = u \text{)}.$$

□ 11 – En déduire l'évolution temporelle des tensions $T_1(u)$ et $T_2(u)$ de chaque ressort.

□ 12 – Représenter les graphes respectifs de $T_1(u)$ et de $T_2(u)$ et discuter leurs possibilités d'intersections (poser $\varepsilon = \frac{g\omega}{\alpha}$).

□ 13 – On considère le cas où les graphes de $T_1(u)$ et de $T_2(u)$ se coupent. Établir, sous la forme $f(\varepsilon) = \frac{T_r}{mg}$, l'équation donnant la valeur limite de la secousse, α_L , en dessous de laquelle le ressort R_1 se casse le premier.

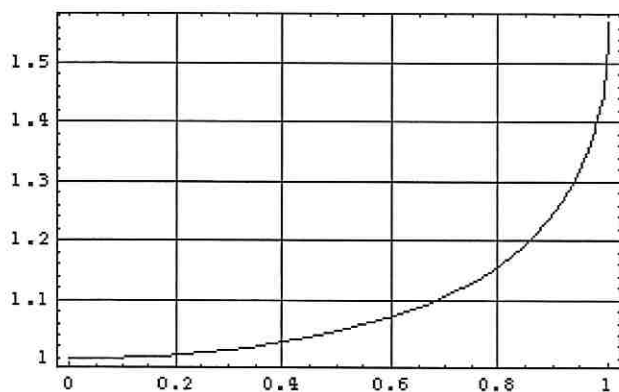


Fig. 3 : graphe de la fonction $\frac{\arcsin(x)}{x}$

□ 14 – Application numérique : la tension de rupture est atteinte pour un allongement de 5,8 cm ; $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$ et $m = 0,1 \text{ kg}$. Calculer α_L . On pourra, si besoin est, utiliser le graphe de la fig. 3.

Vers une modélisation plus réaliste

□ 15 – Peut-être vous est-il apparu avant même cette question que le traitement des questions 13 et 14 était sous-tendu par une hypothèse plutôt discutable sur le comportement global des ressorts. C'est vrai. Dans quel sens un traitement plus réaliste de la situation affecterait-il la valeur numérique de α_L ? Il va de soi que la notion de secousse limite reste

pertinente, seule change la manière de la calculer ; on ne demande ici que des arguments qualitatifs et l'on s'attachera surtout à la plausibilité de l'argumentation.

Fin de cette partie

FIN DU DS