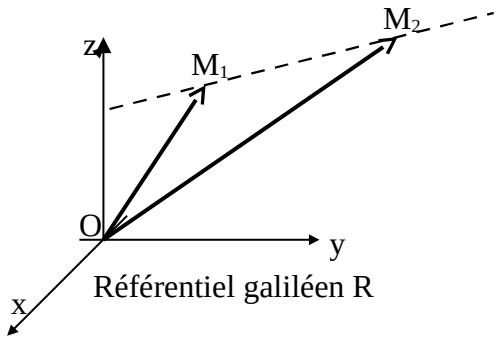
SYSTEME ISOLE DE DEUX POINTS MATERIELS EN INTERACTION
REDUCTION DU PROBLEME À DEUX CORPS

On considère un système de deux points M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 en interaction dans un référentiel R galiléen.
Leurs positions sont repérées par les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$
Les forces d'interaction $\overrightarrow{F_{1/2}}$ et $\overrightarrow{F_{2/1}}$ s'exerçant entre M_1 et M_2 sont supposées conservatives. Elles dérivent donc d'une énergie potentielle.
Le système des deux points M_1 et M_2 est isolé (absence de forces extérieures s'exerçant sur le système).



I- Etude du système dans le référentiel barycentrique

Le mouvement des points M_1 et M_2 dans R peut se décomposer en deux mouvements : le mouvement de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique R* et le mouvement du barycentre G des deux points dans R.

Le référentiel barycentrique associé à un système mécanique est un référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude R et dans lequel le barycentre G du système est fixe. Il est noté R* dans ce poly.

Rappels :

- Les vecteurs de base liés à R* ont donc une direction fixe dans R par définition de la translation.
- La vitesse d'entraînement de R* par rapport à R est égale à la vitesse $\left(\overrightarrow{v_G}\right)_R$ de G dans R (cf cours ME2).

L'étude du mouvement dans R* se justifie par ailleurs en considérant que l'on étudiera dans la plupart des cas des masses en interaction très différentes. Par exemple :

- Soleil-Terre ($m_S >> m_T$) : Le barycentre G du système est alors quasiment confondu avec le Soleil qui est alors immobile dans R*. Il n'y a donc que le mouvement de la Terre dans R* à déterminer c'est-à-dire son mouvement dans le référentiel héliocentrique.

- Terre-satellite artificiel ($m_T >> m_{sat}$) : Le barycentre G du système est alors quasiment confondu avec la Terre qui est alors immobile dans R*. Il n'y a donc que le mouvement du satellite dans R* à déterminer c'est-à-dire son mouvement dans le référentiel géocentrique.

II- Caractère galiléen du référentiel barycentrique R*

Le théorème de la quantité de mouvement appliqué au système des deux points dans R galiléen s'écrit : $\left(\frac{d\overrightarrow{p_{syst}}}{dt}\right)_R = \sum\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $(\vec{p})_R = m\left(\overrightarrow{v_G}\right)_R = \overrightarrow{cste}$

$\Rightarrow$ le mouvement de G dans R est rectiligne et uniforme.

R* est donc animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R galiléen

Conséquence : Le référentiel barycentrique est galiléen.
Les forces d'inertie n'interviendront donc pas dans l'étude du système dans R*.

III- Réduction du problème à deux corps en un problème à un corps

a- Particule fictive

- P.F.D.appliqué à M_1 dans R : $m_1\left(\frac{d^2\overrightarrow{GM_1}}{dt^2}\right)_{R*} = \overrightarrow{F_{2/1}}$ (1)

- P.F.D. appliqué à M_2 dans R : $m_2\left(\frac{d^2\overrightarrow{GM_2}}{dt^2}\right)_{R*} = \overrightarrow{F_{1/2}}$ (2)

Ces deux équations sont couplées par l'intermédiaire des forces d'interaction, qui dépendent de la position de l'autre particule (elles sont portées par la droite (M_1M_2)).
On peut découpler ces deux équations en les combinant : $m_1(2) - m_2(1)$

On obtient : $m_1m_2\left(\frac{d^2\left(\overrightarrow{GM_2}-\overrightarrow{GM_1}\right)}{dt^2}\right)_R = m_1\overrightarrow{F_{1/2}} - m_2\overrightarrow{F_{2/1}} = (m_1+m_2)\overrightarrow{F_{1/2}}$

Soit : $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{d^2\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)}{dt^2}\right)_R = \overrightarrow{F_{1/2}}$

On pose $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GP}$ et on note $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ la masse réduite du système

On obtient alors : $\mu\left(\frac{d^2\overrightarrow{GP}}{dt^2}\right)_R = \overrightarrow{F_{1/2}}$

C'est l'équation du mouvement d'une particule fictive P de masse □ soumis à une force centrale d'intensité égale à celle de la force d'interaction s'exerçant entre M_1 et M_2.
Cette particule fictive, assimilée au point P, peut aussi être appelée mobile réduit ou point fictif.

IV- Intérêt de la particule fictive

La particule fictive, notée P, est soumise dans le référentiel barycentrique à une force centrale (force passant par G, point fixe de R*).

Le mouvement d'un point soumis à une force centrale a été étudié en première année.
La connaissance de la trajectoire de la particule fictive P dans R* permettra ensuite d'en déduire les trajectoires de M_1 et de M_2 dans ce référentiel.

- Le barycentre G du système est défini par la relation : $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$
- Le point fictif est défini par $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{M_1M_2}$

D'où : $\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{GP}$

Conséquence : Les mouvements de M_1 et de M_2 dans le référentiel barycentrique R* se déduisent de celui de P dans R*. Leurs trajectoires sont homothétiques.

Cette propriété est visualisable dans l'animation « barycentre, masse réduite » du site « figure animées pour la physique » à rubrique « Systèmes matériels ».

Cas particulier d'une masse très supérieure à l'autre, exemples :

Soleil-Terre ($m_S >> m_T$) : Le barycentre G du système est alors quasiment confondu avec le Soleil qui est alors immobile dans R*. La Terre a le même mouvement dans R* (référentiel héliocentrique) que le mobile réduit.

Terre-satellite artificiel ($m_T >> m_{sat}$) : Le barycentre G du système est alors quasiment confondu avec la Terre qui est alors immobile dans R*. Le satellite a le même mouvement dans R* (référentiel géocentrique) que le mobile réduit.

V- Eléments cinétiques du système dans le référentiel barycentrique R*

a- Moment cinétique barycentrique du système

- Théorème du moment cinétique dans R* galiléen : $\left(\frac{d\left(\overrightarrow{\sigma_{/G}}\right)_{syst}}{dt}\right)_{R*} = \sum\left(\overrightarrow{M_{/G}\vec{F}_{ext}}\right)_{R*} = \vec{0}$

Il y a conservation du vecteur moment cinétique d'un système isolé dans R*

- Moment cinétique barycentrique :

On montre facilement en sommant les moment cinétiques de chacun des deux points dans R* que :

$$\left(\left(\overrightarrow{\sigma_{/G}}\right)_{syst}\right)_{R*} = \mu\overrightarrow{GP} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R^*}$$

Le moment cinétique barycentrique du système est égal à celui du mobile réduit dans R*

b- Energie cinétique barycentrique du système

De même, en sommant les énergies cinétiques de chacun des deux points M_1 et M_2 dans R* :

On obtient : $$\left(E_{Csyst}\right)_{R*} = \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\overrightarrow{GP}}{dt}\right)_{R*}\right)^2$$

L'énergie cinétique barycentrique du système est égale à celle du mobile réduit dans R*.

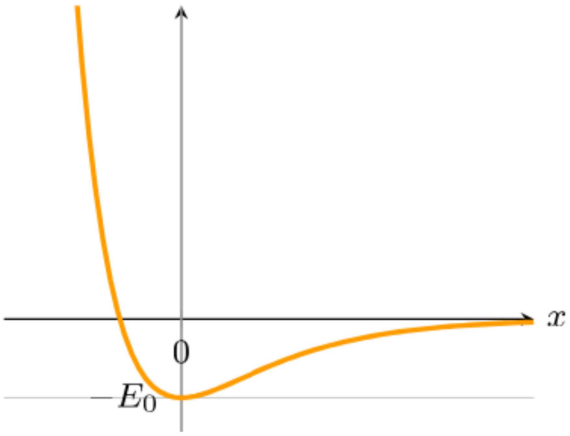
Tout se passe comme si une particule fictive de masse μ était soumise dans le référentiel barycentrique à la force centrale $\overrightarrow{F_{1/2}}$. Les trajectoires des points matériels réels se déduisent dans ce référentiel par homothétie de la trajectoire de cette particule fictive.

VI- Exercices d'application

Exercice 1 : *Rotation et vibration d'une molécule di-atomique (source : d'après Femto-physique)*

Considérons une molécule diatomique A-B isolée, où A et B représentent deux atomes considérés ponctuels de masse m_A et m_B. Bien que la description des édifices moléculaires relève de la mécanique quantique, adoptons le point de vue phénoménologique en traitant l'interaction inter-atomique de façon classique *via* le potentiel de Morse représenté sur le graphe ci-dessous où x représente l'écart entre les atomes par rapport à l'équilibre.

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = E_0 \left(\mathrm{e}^{-2ax} - 2\mathrm{e}^{-ax}\right)$$



On s'intéresse dans un premier temps à un mouvement de vibration des atomes autour de la position d'équilibre dans le référentiel barycentrique de la molécule sans envisager de rotation.

1) Simplifier l'expression de l'énergie potentielle d'interaction pour des petites oscillations autour de la position d'équilibre.
2) Déterminer l'expression de la fréquence des vibrations de la liaison A-B en étudiant la particule fictive associée à la molécule.

Rm : Le rayonnement associé appartient au domaine infra-rouge du spectre électromagnétique.

On tient compte à présent, en plus du mouvement de vibration, d'un mouvement de rotation de la molécule dans le référentiel barycentrique.

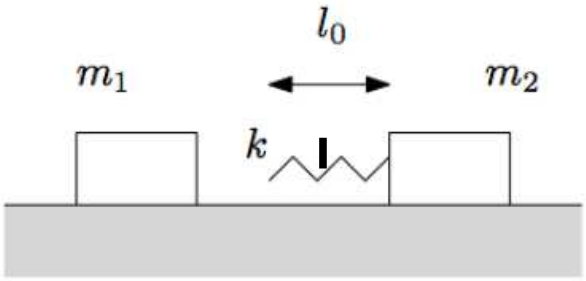
3) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective de la particule fictive et identifier trois termes correspondant à trois énergies différentes.

Le mouvement rotatif de la molécule a été obtenu avec des conditions initiales correspondant à un moment cinétique baryentrique $\overrightarrow{L_0^*}$

4) A quelle condition le mouvement des deux atomes dans le référentiel barycentrique est-il circulaire ? Déterminer l'équation vérifiée par le paramètre x dans ce cas.

Exercice 2 : *Compression d'un ressort (oral X MPI 2023)*

Soient deux masses m_1 et m_2 se déplaçant sans frottement sur un plan horizontal. La masse m_2 et reliée à un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide l_0. La masse m_1 a une vitesse initiale v_0 et m_2 est immobile à t = 0.



1) Déterminer la compression maximale du ressort.
2) Déterminer les vitesses des deux masses en fin d'interaction.