Exercices de mécanique ++

Exercice 1 *: Force en 1/r^n (proche d'un oral Mines-Ponts MPI 2022)*

Un point matériel de masse m évolue dans le champ de force centrale attractif $F(r)\vec{u}_r$, de centre O.

On note v_0 la vitesse associée à une trajectoire circulaire de rayon r_0.
L'objet subit une légère perturbation de vitesse, de sorte qu'à t = 0 : $r(0) = r_0$, $v_\theta(0) = r_0\dot{\theta}(0) = v_0$ et $v_r(0) = \dot{r}(0) = \alpha v_0$, avec $\alpha << 1$.

1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par le rayon r(t) au voisinage de r_0. On peut pour cela poser que $r(t) = r_0 + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| << r_0$.
2) En déduire un critère que doit vérifier le champ de force pour que l'évolution ultérieure se fasse au voisinage du cercle initial.
3) Que devient cette condition pour un champ de force en 1/r^n ? Qu'en est-il pour le cas newtonien ?

Exercice 2 *: La fusée, force de poussée (d'après Mines-Ponts MP 2015)*

On étudie une fusée au décollage dans le référentiel terrestre galiléen. Son mouvement est supposé rectiligne vers le haut. La planète est supposée sans atmosphère et le champ de pesanteur est uniforme : g = 9,81m.s^{-2}.
On note m(t) sa masse totale à l'instant *t* et $\overrightarrow{v(t)}$ sa vitesse dans le référentiel terrestre à l'instant t.
La fusée éjecte des gaz avec une vitesse constante $\vec{u}$ par rapport à la fusée. On note δm la masse éjectée entre t et t + dt et D_m le débit massique de gaz supposé constant.

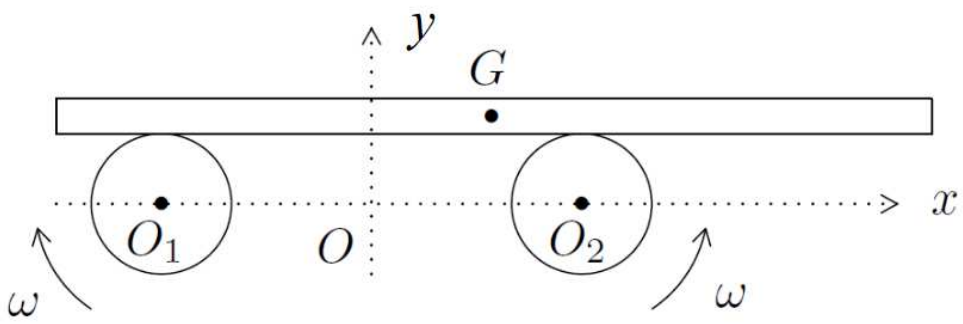
1. En prenant pour système la masse m(t) (fusée + carburant) l'instant t, exprimer sa quantité de mouvement $\overrightarrow{p(t)}$ dans le référentiel terrestre.
2. Exprimer de même la quantité de mouvement $\overrightarrow{p(t+dt)}$ de ce même système fermé à l'instant t+dt dans le référentiel terrestre.
3. En appliquant le P.F.D. dans le référentiel terrestre sur le système considéré précédemment montrer que :

$$m(t)\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{Rterrestre} = m(t)\vec{g} - \frac{\delta m}{dt}\vec{u} \quad (1)$$

4. Identifier, dans le second membre de l''equation (1), l'intensité F de la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?
5. Déterminer l'expression de la vitesse v(t) de la fusée à l'instant t, en fonction de t, m(t), g, u et de la masse de la fusée à l'instant t = 0 notée m_0.

Exercice 3 *: Expérience de Timochenko*

Une plaque de masse m, d'épaisseur négligeable et de longueur L est posée horizontalement sur deux rouleaux tournant en sens inverse à vitesse suffisante pour que la plaque glisse constamment sur les cylindres avec un coefficient de frottement dynamique μ.



Les deux roues ont un rayon a. Elles tournent à la vitesse angulaire constante ω en sens inverse autour de leur axes respectifs fixes. Les axes de ces deux roues sont distants de d < L.
On constate que la planche ne bascule pas et qu'elle oscille. La position de la planche à un instant t est repérée par la distance x entre son centre de masse G et l'axe Oy.
On suppose que la barre est suffisamment grande pour que le contact existe toujours

1. Ecrire deux relations traduisant le fait que « la planche ne bascule pas et oscille horizontalement ». En déduire les expressions des réactions normales s'exerçant sur la planche au niveau de chacun des cylindres.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la plaque et en déduire la période de ses oscillations.

Exercice 4 *: Déviation d'un palet sur un plateau en rotation (expérience au Palais de la Découverte))*



Une activité au Palais de la Découverte à Paris présentait un manège circulaire de rayon R qui tournait à la vitesse angulaire ω constante autour de son axe de symétrie vertical. Un animateur se plaçait au centre O du manège et des spectateurs étaient assis sur la périphérie du manège. Un des spectateurs, S, faisait glisser vers l'animateur, O, avec une vitesse initiale horizontale et radiale v_0 un palet M de masse m qui glissait sans frottement sur le sol parfaitement ciré.

1) Expliquer pourquoi le palet n'atteignait pas l'animateur.

Le palet est repéré dans le référentiel du manège par ses coordonnées polaires (r, θ).

2) Déterminer les expressions de $\dot{r}$ et $\dot{\theta}$ en fonction de r, R, ω et éventuellement de v_0 .
3) En déduire la distance minimale d'approche r_{min} du palet à l'animateur en fonction de R, v_0 et ω.

Exercice 5 *: Pendule de Foucault (ENS PC 2022)*

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67\,\text{m}$ de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36\,\text{kg}$.

La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω. On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (cf. figure 1). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite *locale*. On note α l'angle entre le pendule et l'axe vertical dirigé par le vecteur $\vec{e_z}$ (cf. figure 1(b)). On note $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.

1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis

Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.

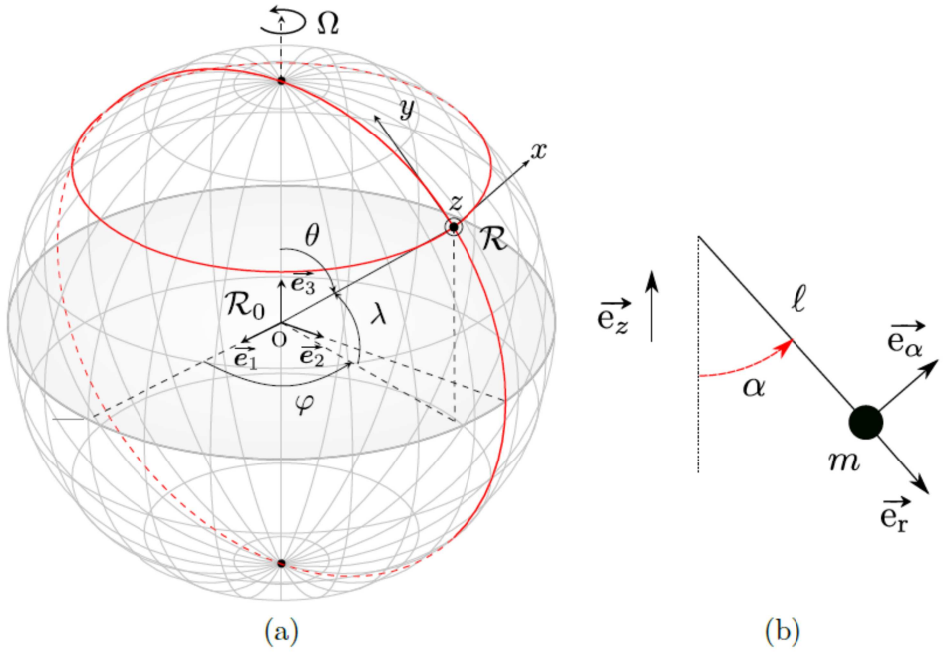


FIGURE 1 – (a) Définitions des repères liés aux référentiels géocentrique et terrestre. (b) Définition de l'angle α et de la base mobile.

1. Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz. Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.
2. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m, puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha})$ définie sur la Fig. 1(b) (on supposera son mouvement plan).
3. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0. Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.
4. Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α.

1.2 Effet de la force d'inertie de Coriolis

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49°$ comme définie sur la figure 1(a). On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz. On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x\,\vec{e_x} - m\omega_0^2 y\,\vec{e_y}$.

5. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0.
6. Décomposer le vecteur $\vec{e_3}$ dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2\, x = 2\tilde{\Omega}\,\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2\, y = -2\tilde{\Omega}\,\dot{x}. \end{cases} \tag{1}$$

   Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.
7. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par $\underline{u}$. Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues $\underline{A}$ et $\underline{B}$.
8. On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de $\underline{u}$.
9. En utilisant le résultat de la question 5, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.
10. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24 h ?
11. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ.