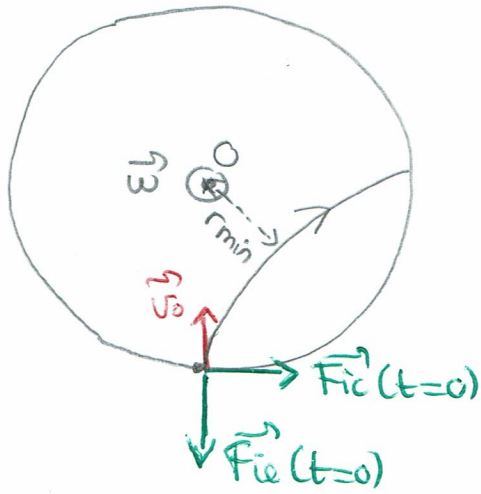
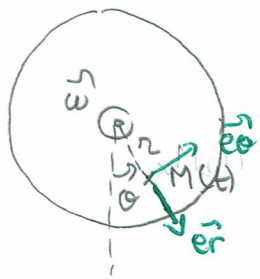
Manège du palais de la découverte.



* Etude dans le référentiel du manège non galiléen car en rotation dans le référentiel terrestre galiléen.
⇒ forces d'inertie.

* BDF : $\vec{P}$, $\vec{N}$ (se compensent mouvement horizontal), $\vec{F_{ie}}$, $\vec{F_{ic}}$

* PFD appliqué au palet et exprimé dans une base polaire.



⚠ θ repère la position de M sur le manège
$\dot{\theta} \neq \omega$ qui est la vitesse angulaire du manège.

- $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r}$
- $(\vec{v_M})_{R\,manège} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$
- $(\vec{a_M})_{R\,manège} = \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

- $\vec{F_{ie}} = -m(\vec{a_{Mc}})_{R\,terrestre} = +m\omega^2 r\,\vec{e_r}$
- $\vec{F_{ic}} = -2m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{v_M})_{R\,manège}$

$$= -2m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2m \begin{vmatrix} -\omega r\dot{\theta} \\ \omega\dot{r} \\ 0 \end{vmatrix}$$

- Projection du PFD

$/\vec{e_r}$: $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = m\omega^2 r + 2m\omega r\dot{\theta}$ (1)

$/\vec{e_\theta}$ $2m\dot{r}\dot{\theta} + mr\ddot{\theta} = -2m\omega\dot{r}$ (2)

On réécrit (2) : $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2\omega\dot{r}$

soit $\frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = -2\omega\dot{r}$

ou $\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = -\omega\frac{d(r^2)}{dt}$

donc $r^2\dot{\theta} = -\omega r^2 + A$

Or à $t=0$ $\dot{\theta} = 0$ et $r = R$ donc $A = \omega R^2$

et $\boxed{r^2\dot{\theta} = \omega(R^2 - r^2)}$

On injecte l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r dans (1)

$\ddot{r} - r \times \frac{1}{r^4}\omega^2(R^2-r^2)^2 = \omega^2 r + 2\omega r \times \frac{1}{r^2}\omega(R^2-r^2)$

$r^3\ddot{r} - \omega^2R^4 - \omega^2r^4 + 2\omega^2R^2r^2 = \omega^2r^4 + 2\omega^2r^2R^2 - 2\omega^2r^4$

$r^3\ddot{r} = \omega^2R^4$

soit $\ddot{r} = \frac{1}{r^3}\omega^2R^4$

$\times \dot{r}$ ↓

$\ddot{r}\dot{r} = \frac{\dot{r}}{r^3}\omega^2R^4$

donc $\frac{1}{2}\dot{r}^2 = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{r^2}\omega^2R^4 + B$

Or à $t=0$: $\dot{r} = -v_0$ et $r = R$

donc $\frac{1}{2}v_0^2 = -\frac{\omega^2}{2}\times R^2 + B$ soit $B = \frac{1}{2}(v_0^2 + \omega^2R^2)$

d'où $\boxed{\dot{r}^2 = -\frac{\omega^2R^4}{r^2} + v_0^2 + \omega^2R^2}$

La distance OM minimale correspond à $\dot{r} = 0$

soit $0 = -\frac{\omega^2R^4}{r_{min}^2} + v_0^2 + \omega^2R^2$

$0 = -\omega^2R^4 + (v_0^2 + \omega^2R^2)r_{min}^2$

d'où $\boxed{r_{min} = \frac{\omega R^2}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2R^2}}}$