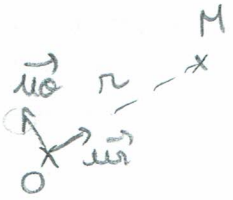
Champ de force en $\frac{1}{r^n}$



Mouvement à force centrale plan

$\vec{L}_{M/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cste}$

d'où $r^2\dot{\theta} = cste$

Dans le cas du mouvement circulaire : $r_0 v_0 = cste$

donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = r_0 v_0}$

PFD $m\vec{a} = F(r)\vec{u_r}$ avec $\vec{OM} = r\vec{u_r}$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

donc / $\vec{u_r}$: $m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r)$

soit $m\ddot{r} - m\frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} = F(r)$

On pose $r(t) = r_0 + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| \ll r_0$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_0^3\left(1+\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^3} = \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\varepsilon}{r_0}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)$$

$$F(r) = F(r_0+\varepsilon) = F(r_0) + \varepsilon\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_0} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

d'où l'équation différentielle du mouvement radial :

$$m\ddot{r} - m r_0^2 v_0^2 \times \frac{1}{r_0^3}\left(1 - \frac{3\varepsilon}{r_0}\right) = F(r_0) + \varepsilon\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_0}$$

soit $\boxed{\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{3v_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_0}\right)\varepsilon(t) = \underbrace{\frac{F(r_0)}{m} + \frac{v_0^2}{r_0}}_{=0 \text{ (Vmaj circulaire)}}}$

Stabilité du mouvement radial autour de r_0 si tous les coefficients de l'équation homogène sont de même signe.

Soit $\frac{3v_0^2}{r_0^2} > \frac{1}{m}\left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_0}$ avec $-m\frac{v_0^2}{r_0} = F(r_0)$

$$\boxed{-\frac{3}{r_0}F(r_0) > \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r_0}}$$

Pour $F = \frac{K}{r^n}$ avec $K<0$ (attraction)

$$\frac{df}{dr} = K(-n) r^{-n-1} = -\frac{nK}{r^{n+1}}$$

Il faut donc $-\frac{3}{r_0}\frac{K}{r_0^n} > -\frac{nK}{r_0^{n+1}}$ ⚠ $K<0$.

soit $3 > n$ donc $\boxed{n<3}$

Pour la gravitation $n=2$ → trajectoire circulaire stable.