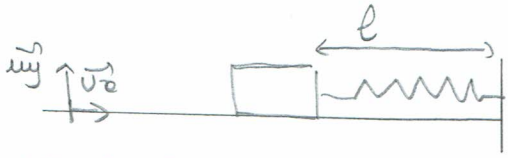
Hystérésis de frottement

1- $\boxed{\theta = 0}$



* $x = 0$ correspond à $\ell = \ell_0$
* $x > 0 \Leftrightarrow$ ressort comprimé et force vers $-\vec{e_x}$ donc $\vec{F} = -k x \vec{e_x}$
* $x < 0 \Leftrightarrow$ ressort étiré et force vers $+\vec{e_x}$ donc $\vec{F} = -k x \vec{e_x}$

BDF : $\vec{T}, \vec{F_r}, \vec{N}, \vec{T} = T\vec{e_x}$ ↳ algébrique

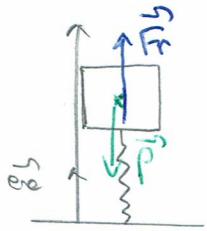
/ox $\quad 0 = T - kx$

/oy $\quad 0 = -P + \|\vec{N}\|$ donc $\|\vec{N}\| = P$

et il n'y a pas glissement donc $\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\|$

soit $k|x| < \mu_s P \Leftrightarrow \boxed{|x_{eq}| < \frac{\mu_s P}{k}}$ ou $\boxed{-\frac{\mu_s P}{k} < x_{eq} < +\frac{\mu_s P}{k}}$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$



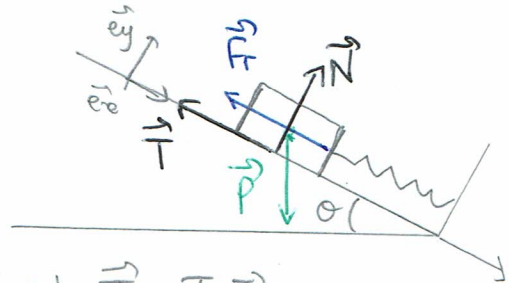
Il n'y a pas de force horizontale pour compenser $\vec{N}$ donc $\|\vec{N}\| = 0$

$\Rightarrow \|\vec{T}\| = 0$

d'où à l'équilibre : $\vec{F_r} + \vec{P} = \vec{0}$

soit /Ox : $\quad -kx - P = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{P}{k}}$

2-a)



On note $\vec{T} = T\vec{e_x}$ ↳ algébrique

PFD à l'équilibre avant glissement

/Ox : $\quad 0 = P\sin\theta - kx + T$

/Oy : $\quad 0 = -P\cos\theta + \|\vec{N}\|$

donc $\|\vec{N}\| = P\cos\theta$

Cet équilibre persiste tant qu'il n'y a pas glissement soit tant que $\|\vec{T}\| < \mu_s \|\vec{N}\|$

Et tant qu'il n'y a pas glissement $x = x_0 = 0$ ($\Leftrightarrow \vec{F_r} = \vec{0}$)

donc $T = -P\sin\theta < 0 \Leftrightarrow$ $\vec{T}$ est vers le haut.

et $\|\vec{T}\| = P\sin\theta$

Donc pas de glissement tant que $P\sin\theta < \mu_s P\cos\theta$

soit $\tan\theta < \mu_s$

donc $\boxed{\theta_1^+ = \arctan(\mu_s)}$

Quand θ atteint θ_{1+} le glissement apparaît : $\|\vec{T}\| = f_s \|\vec{N}\| = 0$

Le pavé glisse jusqu'à atteindre une nouvelle position d'équilibre telle que :

$/Ox$: $0 = P \sin\theta_{1+} - k x_{1+}$

D'où $\boxed{x_{1+} = \frac{P}{k} \sin\theta_{1+} > 0}$ ressort comprimé à l'équilibre.

b) Tant qu'il n'y a pas glissement, le solide est en équilibre et donc x ne varie pas : $x = x_{1+}$

* PFD / Ox : $0 = P \sin\theta - k x_{1+} + T$

soit $T = k x_{1+} - P \sin\theta = P(\sin\theta_{1+} - \sin\theta)$

Or $\theta > \theta_{1+}$ donc $T < 0$ ou $\vec{T}$ toujours orienté vers le haut

* PFD / Oy : $0 = -P\cos\theta + \|\vec{N}\|$ donc $\|\vec{N}\| = P\cos\theta$

$\Rightarrow$ pas de glissement tant que $P(\sin\theta - \sin\theta_{1+}) < \mu_s P\cos\theta$

Le glissement commence pour θ_{2+} tel que :

$\boxed{\sin\theta_{2+} - \sin\theta_{1+} = \mu_s \cos\theta_{2+}}$

La masse glisse (avec $\vec{T} = \vec{0}$) jusqu'à une nouvelle position d'équilibre telle que : $0 = P \sin\theta_{2+} - k x_{2+}$

soit $\boxed{x_{2+} = \frac{P}{k} \sin\theta_{2+}}$

c) * On peut refaire le même raisonnement entre θ_{i+} et θ_{i+1}^{+} qui est l'intervalle de non glissement :

$\boxed{\sin\theta_{i+1}^{+} - \sin\theta_{i}^{+} = \mu_s \cos\theta_{i+1}}$

* Le solide glisse jusqu'en $\boxed{x_{i+1}^{+} = \frac{P}{k} \sin\theta_{i+1}^{+}}$

* La suite des $\sin\theta_i^{+}$ est croissante et majorée donc

$\sin(\theta_{i+1}^{+}) - \sin(\theta_i^{+}) \longrightarrow \sin(\theta_\infty^{+}) - \sin(\theta_\infty^{+}) = 0$

et donc $\theta_{i+1}^{+} - \theta_i^{+} \to 0$

3- Parcours inverse : on diminue θ depuis $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

* On diminue l'angle de θ_i^- jusqu'à θ_{i+1}^-, angle pour lequel le glissement commence.

Tant que θ_{i+1}^- n'est pas atteint, le solide ne glisse pas donc $x_e = x_{ei}^-$

PFD / Ox : $0 = P\sin\theta - k x_{ei}^- + T$

avec $T = -P\sin\theta + P\sin\theta_i^- = P(\sin\theta_i^- - \sin\theta)$

avec cette fois $\theta < \theta_i^-$ donc $T > 0$ et $\vec{T}$ vers le bas

donc $\|\vec{T}\| = P(\sin\theta_i^- - \sin\theta) < \mu_s P\cos\theta$

A la limite du glissement : $\sin\theta_i^- - \sin\theta_{i+1}^- = \mu_s \cos\theta_{i+1}^-$

soit $\sin\theta_{i+1}^- - \sin\theta_i^- = -\mu_s \cos\theta_{i+1}^-$

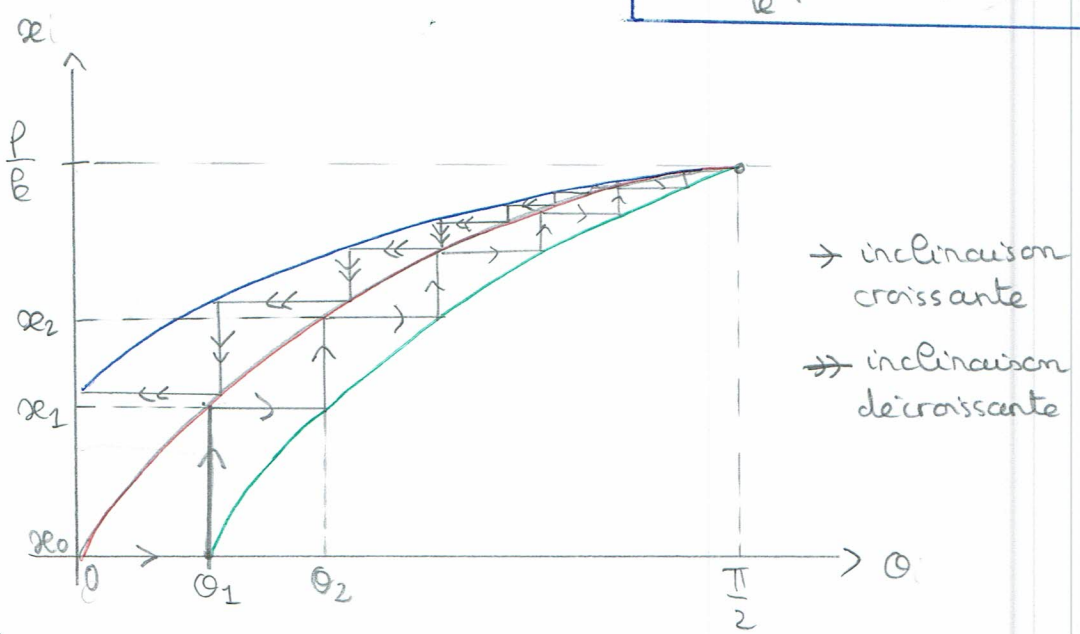
et $x_{ei}^- = \frac{P}{k}\sin\theta_i^-$ (condition d'équilibre inchangée)

* On a de nouveau $\theta_{i+1}^- - \theta_i^- \to 0$

4- * (x_{ei}^+, θ_i^+) et (x_{ei}^-, θ_i^-) sont sur la courbe $x = \frac{P}{k}\sin\theta$

* $(x_{ei}^+, \theta_{i+1}^+)$ sont sur la courbe $x = \frac{P}{k}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$

* $(x_{ei}^-, \theta_{i+1}^-)$ sont sur la courbe $x = \frac{P}{k}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$



Pour des inclinaisons identiques, on observe que les positions et angles à l'équilibre ne sont pas les mêmes en fonction du sens de variation de l'inclinaison. Il y a Hysteresis