Exercice 1 : performances

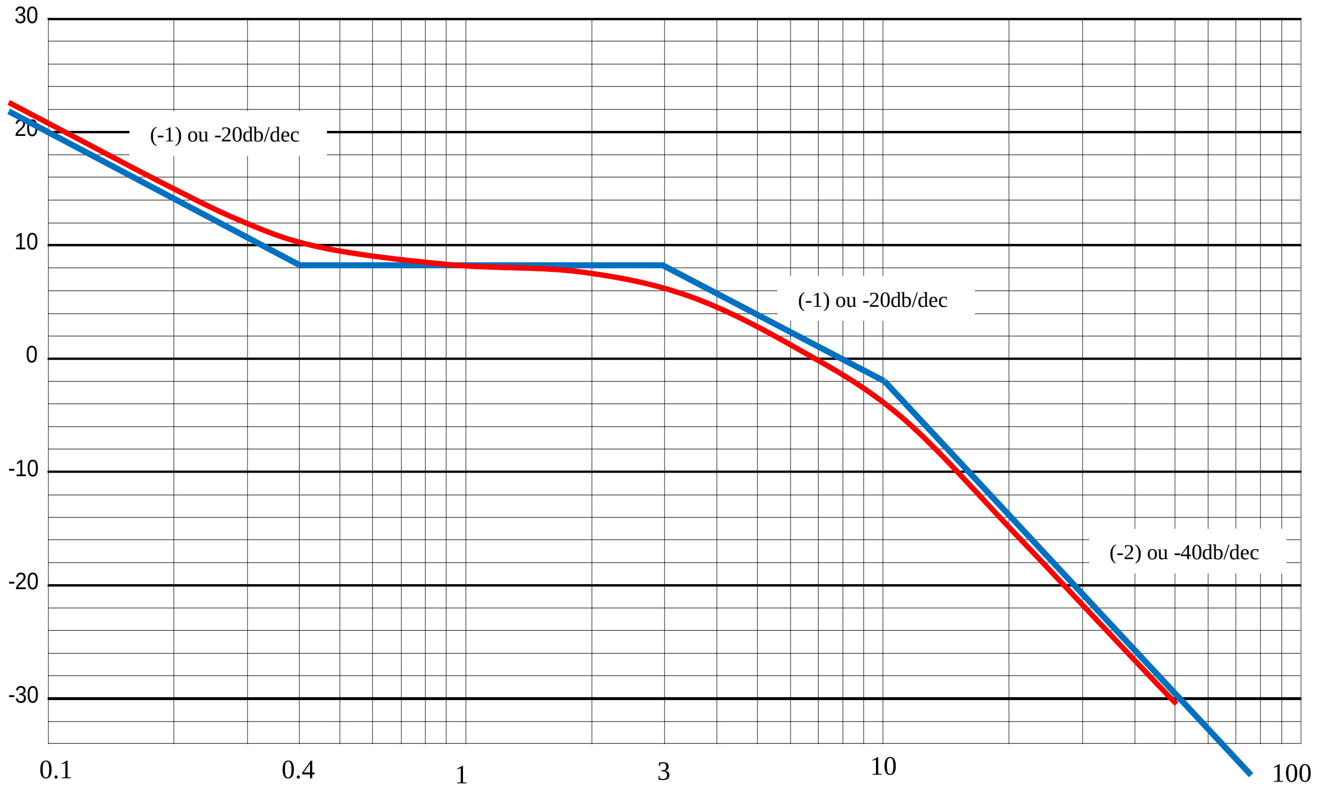
Exercice 2 : résolution d'équation différentielle par Laplace

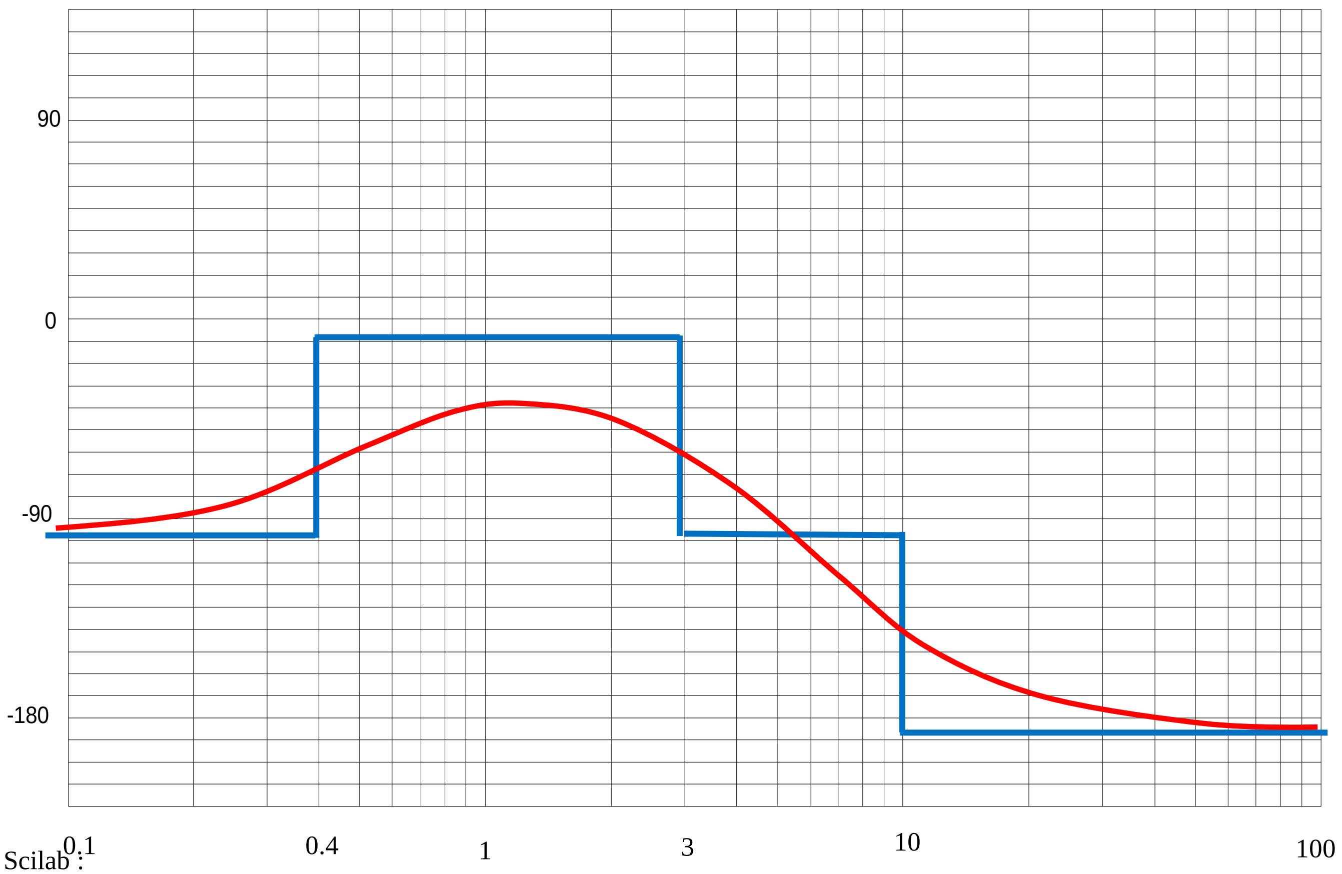
Exercice 3 : schémas blocs et fonctions de transfert

Exercice 4 : modèle comportemental par identification temporelle

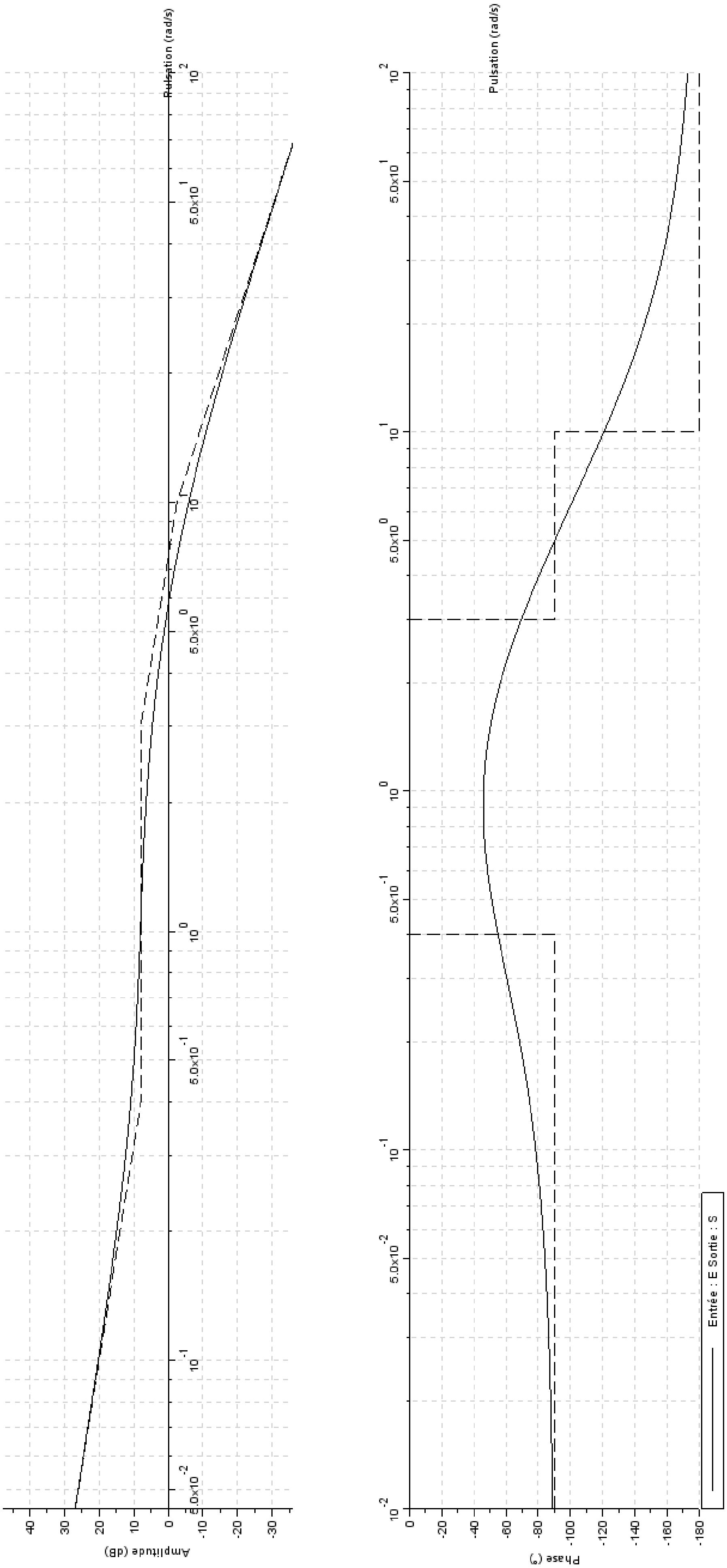
Exercice 5 : Tracés de diagrammes de Bode

$$H(p) = \frac{75(p+0.4)}{p(p+3)(p+10)} = \frac{(\frac{p}{0.4}+1)}{p(\frac{p}{3}+1)(\frac{p}{10}+1)}$$





Sous Scilab :


Pulsation (rad/s)
Amplitude (dB)
Pulsation (rad/s)
Phase (°)
Entrée : E Sortie : S

Exercice 6 : modèles de connaissance et de comportement d'une suspension pilotée

1 - $M\,\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = f_r(t) + f_a(t) + f_s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} M\,p^2\,Y(p) = F_r(p) + F_a(p) + F_s(p)$

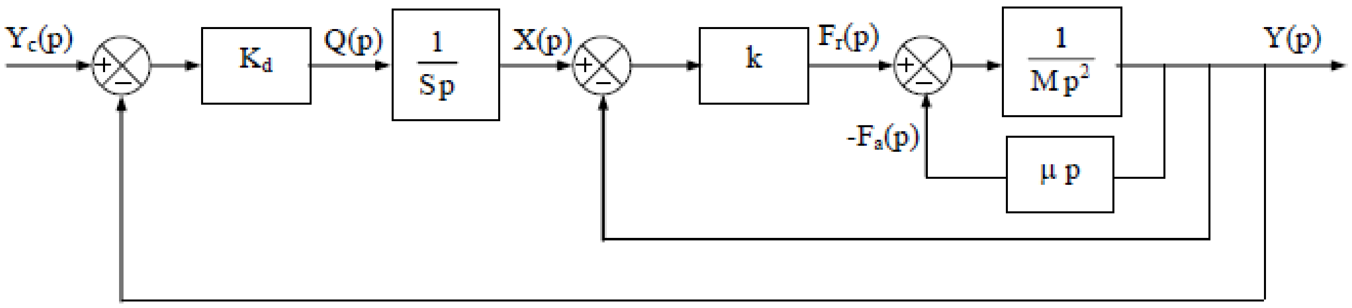
$f_a(t) = -\,\mu\,\dfrac{d\,y(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} F_a(p) = -\,\mu\,p\,Y(p)$

$f_r(t) = k\,[x(t) - y(t)] \xrightarrow{\mathcal{L}} F_r(p) = k\,[X(p) - Y(p)]$

$q(t) = S\,\dfrac{d\,x(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(p) = S\,p\,X(p)$

$q(t) = K_d\,[y_c(t) - y(t)] \xrightarrow{\mathcal{L}} Q(p) = K_d\,[Y_c(p) - Y(p)]$

2 – Schéma-bloc :



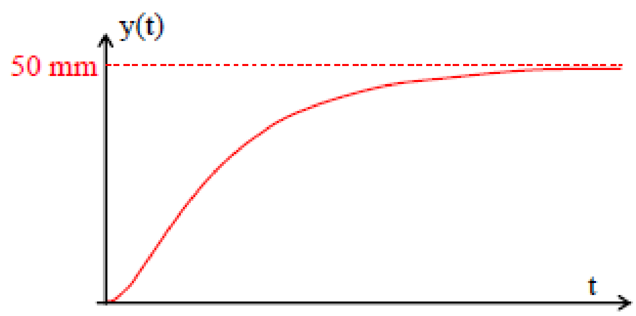
3 – $\dfrac{Y(p)}{F_r(p)} = \dfrac{\dfrac{1}{Mp^2}}{1+\dfrac{\mu p}{Mp^2}} = \dfrac{1}{Mp^2+\mu p}$ d'où $H_1(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{\dfrac{k}{Mp^2+\mu p}}{1+\dfrac{k}{Mp^2+\mu p}} = \dfrac{k}{Mp^2+\mu p + k}$

Forme canonique : $\boxed{H_1(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{\mu}{k}p+\dfrac{M}{k}p^2}}$

Gain statique : $\boxed{K = 1}$ Pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}}$ Coefficient d'amortissement : $\boxed{m = \dfrac{\mu}{2\sqrt{kM}}}$

A.N. : $\boxed{\omega_0 = 20 \text{ rad/s}}$ $\boxed{m = 1{,}5}$

4 - $H_1(p) = \dfrac{1}{1+0{,}15p+25.10^{-4}p^2} \approx \dfrac{416}{(p+8)(p+52)}$

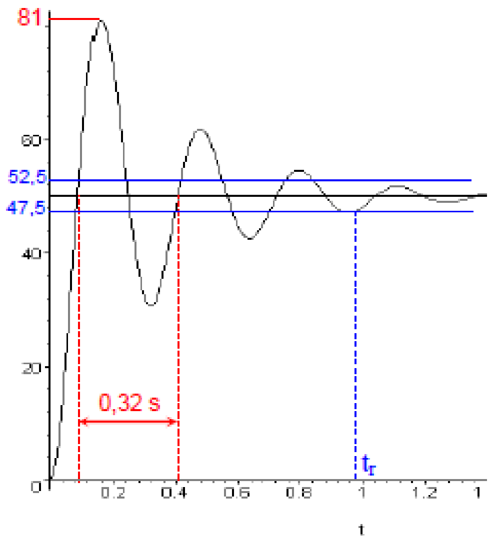


Allure de la réponse à un échelon de 50 mm :
racines réelles (m =1,5 > 1) donc pas d'oscillations

5 – Equation de y(t) :

$Y(p) = H_1(p)\,.\,X(p) = \dfrac{416}{(p+8)(p+52)}\,\dfrac{50}{p} = \dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p+8}+\dfrac{C}{p+52} = \dfrac{50}{p} - \dfrac{59}{p+8} + \dfrac{9}{p+52}$

d'où $\boxed{y(t) = (50 - 59\,e^{-8t} + 9\,e^{-52t})\,u(t)}$



6 – 1er dépassement $D_1 = 50\ e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 81 - 50 = 31$

$$-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}} = \mathrm{Ln}\left(\frac{31}{50}\right) = -0{,}48$$

$$m^2 = \frac{0{,}48^2}{\pi^2 + 0{,}48^2} \Rightarrow \boxed{m = 0{,}15}$$

Pseudopériode $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}} = 0{,}032$

$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = 20\ \text{rad/s}}$

Coefficient d'amortissement visqueux :

$\mu = 2\ m\ \sqrt{kM} = 2\ .\ 0{,}15\ .\ \sqrt{2.10^4 50} \quad \Rightarrow \boxed{\mu = 3.10^2\ \text{N s /m}}$

7 – Temps de réponse : la réponse doit être comprise entre 0,95.50 = 47,5 et 1,05.50 = 52,5 d'où $\boxed{t_r \approx 1\ \text{s}}$

On aurait un temps de réponse minimal avec m = 0,7 donc $\mu = 2\ .\ 0{,}7\ .\ \sqrt{2.10^4 50} \quad \Rightarrow \boxed{\mu = 1{,}4.10^3\ \text{N s /m}}$

8 – $$H_2(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_d \dfrac{1}{Sp} H_1}{1 + K_d \dfrac{1}{Sp} H_1} = \frac{K_d \dfrac{k}{Mp^2+\mu p+k}}{Sp + K_d \dfrac{k}{Mp^2+\mu p+k}} = \frac{K_d\ k}{Sp(Mp^2+\mu p+k)+K_d\ k}$$

$$\boxed{H_2(p) = \frac{1}{1+\dfrac{S}{K_d}p+\dfrac{S\mu}{K_d k}p^2+\dfrac{SM}{K_d k}p^3}}$$

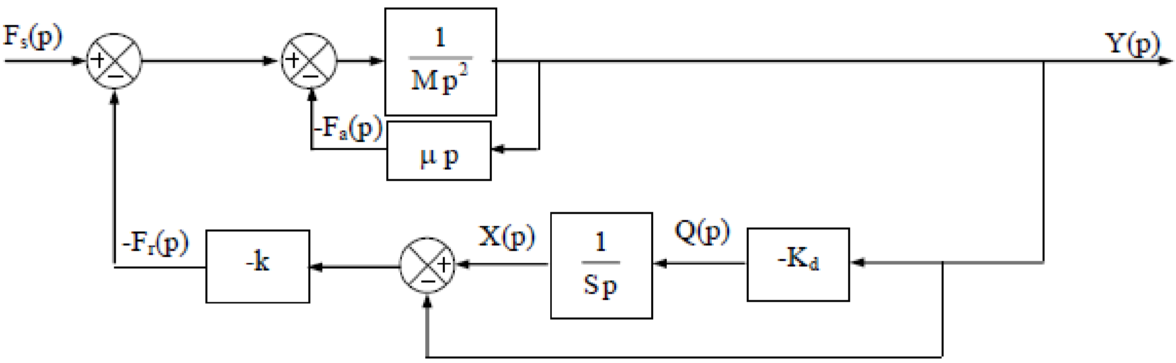
$\boxed{\text{gain statique} = 1}$ $\boxed{\text{ordre} = 3}$ $\boxed{\text{classe} = 0}$

9 – $y_c(t) = 0{,}1\ u(t) \Rightarrow Y_c(p) = \dfrac{0{,}1}{p}$ d'où $Y(p) = H_2(p)\ .\ Y_c(p) = \dfrac{1}{1+\dfrac{S}{K_d}p+\dfrac{S\mu}{K_d k}p^2+\dfrac{SM}{K_d k}p^3}\ .\ \dfrac{0{,}1}{p}$

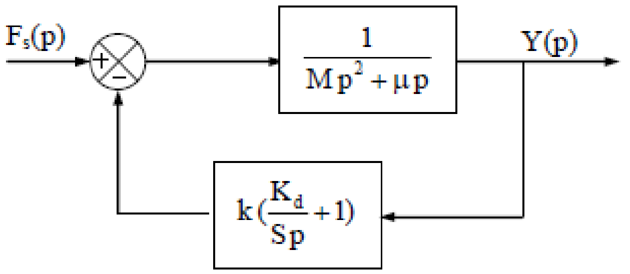
$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{p\to\infty} p\ Y(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{0{,}1}{1+\dfrac{S}{K_d}p+\dfrac{S\mu}{K_d k}p^2+\dfrac{SM}{K_d k}p^3} \Rightarrow \boxed{\lim_{t\to 0} y(t) = 0}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} p\ Y(p) = \lim_{p\to 0} \frac{0{,}1}{1+\dfrac{S}{K_d}p+\dfrac{S\mu}{K_d k}p^2+\dfrac{SM}{K_d k}p^3} \Rightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} y(t) = 0{,}1\ \text{m}}$$

10 – Schéma-bloc d'entrée $F_s(p)$:



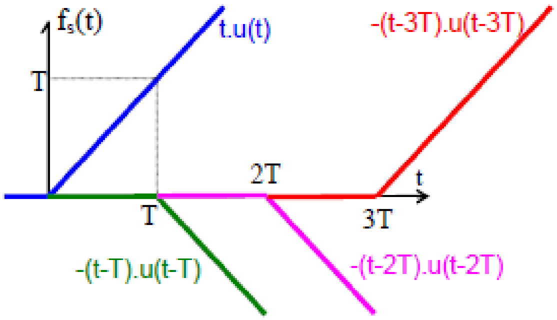
11 -



$$H_3(p) = \frac{Y(p)}{F_s(p)} = \frac{\frac{1}{Mp^2+\mu p}}{1+\frac{k(K_d+Sp)}{Sp(Mp^2+\mu p)}}$$

$$\boxed{H_3(p) = \frac{Sp}{Sp(Mp^2+\mu p+k)+K_d\, k}}$$

12 –



$f_s(t) = t.u(t) – (t-T).u(t-T) -(t-2T).u(t-2T) +(t-3T).u(t-3T)$

d'où $\boxed{F_s(p) = \frac{1}{p^2}(1-e^{-Tp} - e^{-2Tp} + e^{-3Tp})}$

13 - $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\, F_s(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\, H_3(p)\, F_s(p) = \lim\limits_{p\to 0} p\, \frac{Sp}{Sp(Mp^2+\mu p+k)+K_d\, k} \cdot \frac{1}{p^2}(1-e^{-Tp} - e^{-2Tp} + e^{-3Tp})$

d'où $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0}$

14 – $f_s(t) = 250 \sin(15\, t)$ donc $y(t) = y_0 \sin(15\, t + \varphi)$ avec $|H_3(15j)| = \frac{y_0}{250}$ et $\arg(15j) = \varphi$

pour $\omega = 15$,$\log(15) = 1{,}18$ et on lit sur le diagramme de Bode : $20 \log |H_3(15j)| = -79$ dB et $\varphi = -20°$

d'où $\frac{y_0}{250} = 10^{-\frac{79}{20}} = 1{,}1.10^{-4}$ soit $y_0 = 0{,}028$ et $\varphi = -20.\frac{\pi}{180} = -0{,}35$ rad $\boxed{y(t) = 0{,}028 \sin(15\, t – 0{,}35)}$

15 - $H_4(p) = \frac{1}{50p^2+300p+2.10^4} = \frac{5.10^{-5}}{1+0{,}015p+\frac{p^2}{400}}$ fonction de transfert du 2ème ordre avec $\omega_0 = 20$

$20 \log(5.10^{-5}) = -86$ dB et $\log(20) = 1{,}3$ d'où le diagramme asymptotique de $H_4(p)$

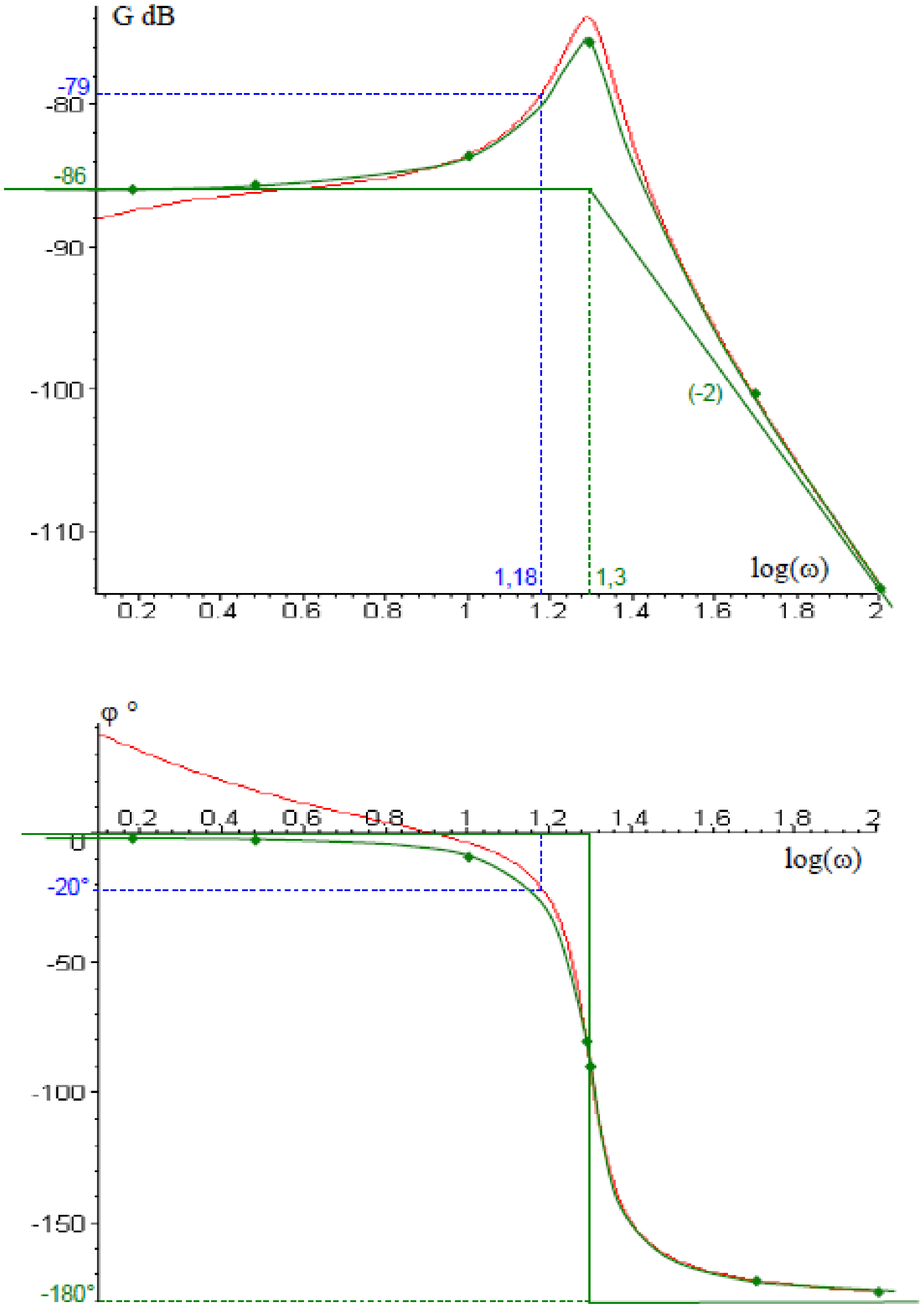
16 - $\frac{2m}{\omega_0} = 0{,}015$ d'où $\boxed{m = 0{,}15 < 0{,}7}$ donc résonance pour $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$ soit $\boxed{\omega_r = 19{,}5 \text{ rad/s}}$

17 – Gain et phase de $H_4(p)$: $G = -20 \log\left(\sqrt{(2.10^4-50\omega^2)^2+(300\omega)^2}\right)$ $\varphi = -\arctan \frac{300\omega}{2.10^4-50\omega^2}$

ω	1,5	3	10	50	100	ω_r =19,5
$\log(\omega)$	0,18	0,48	1	1,7	2	1,29
G dB	-86	-85,8	-83,7	-100	-114	-75,5
φ °	-1,3	-2,6	-11,3	-172	-176	-80

A partir de $\omega_1 \approx 10$ rad/s, on peut approximer $H_3(p)$ par $H_4(p)$

Diagramme de Bode de $H_3(p)$ et $H_4(p)$:



Exercice 7 : Etude de stabilité

Q1 :

$$FTBF = \frac{H}{1+H} = \frac{K}{p^n(1+Tp)^2+K} \text{ d'où } \varepsilon_v = \lim_{p\to 0} \frac{p^n(1+Tp)^2}{p^{n+1}(1+Tp)^2+Kp} \text{ on obtient :}$$

si $n=0 \Rightarrow \varepsilon_v = \infty$

si $n=1 \Rightarrow \varepsilon_v = \dfrac{1}{K}$

si $n\geq 2 \Rightarrow \varepsilon_v = 0$

D'où : $K = \dfrac{1}{0.04} = 25$

Q2 : on applique Routh : $D(p) = K + p + 2Tp^2 + T^2p^3$

p^3	T^2	1	0 ...
p^2	$2T$	K	0 ...
p^1	$\dfrac{-KT^2+2T}{2T} = 1 - \dfrac{KT}{2}$	0	0 ...
p^0	K	0	0 ...

D'où $T < \dfrac{2}{K} = 0.08$

Q3 : $MG = -20\log\left|FTBO(j\omega_{-180})\right|$ avec $\omega_{-180} / Arg(FTBO(j\omega_{-180})) = -180°$

On cherche ω_{-180} :

$$-180° = -Arg(j\omega_{-180}) - 2Arg(1+j\omega_{-180}) = -90 - 2Arc\tan(T\omega_{-180})$$

D'où $Arc\tan(T\omega_{-180}) = 45°$ ce qui donne $\omega_{-180} = \dfrac{1}{T}$

On obtient : $MG = -20\log K + 20\log(\dfrac{1}{T}) + 20\log(2) = 10$ ce qui donne : T = 0.025 (s)

Q4 : par le calcul : $M\varphi = 180 + Arg(FTBO(j\omega_1))$ avec $\omega_1 / 20\log\left|FTBO(j\omega_1)\right| = 0$

On trouve $\omega_1 = 20\ rad/s$ ce qui donne $M\varphi = 180 - 90 - 2Arc\tan(T\omega_1) = 37°$

Exercice 8 : Placement et détermination d'un correcteur proportionnel intégral

Q1 :

- $H_{bf}(p) = \frac{\frac{1250}{4p^2+25p+25}}{1+\frac{1250}{4p^2+25p+25}} = \frac{1250}{4p^2+25p+25+1250} = \frac{\frac{1250}{1275}}{\frac{4}{1275}p^2+\frac{25}{1275}p+1}$
- $\omega_{0bf} = \sqrt{\frac{1275}{4}} = 17{,}8\,rad/s$ *et* $m = \frac{25}{2.1275}.\sqrt{\frac{1275}{4}} = 0{,}17 < 1$ donc régime pseudopériodique
- $\varepsilon_S = 1 - \frac{1250}{1275}.1 = \frac{25}{1275} \neq 0$

Q2 :

- $H_{bO}(p) = \frac{1250}{4p^2+25p+25} = \frac{1250}{4(p+1{,}25)(p+5)}$
- $20\log\left(\frac{1250}{25}\right) = 34\,dB$ $\omega_{c1} = 1{,}25\,rad/s$ $\omega_{c2} = 5\,rad/s$ $\omega_{0bo} = \sqrt{\frac{25}{4}} = 2{,}5\,rad/s$
- Coupure à OdB : graphiquement $\Rightarrow \omega_{co} \approx 18\,rad/s$

ou à partir du tracé asymptotique (droite pente -40dB /dec) : $\frac{0_{dB}-20\log(50)}{\log(\omega_{co})-\log(2{,}5)} = -40 \Rightarrow \omega_{co} = 2{,}5\sqrt{50} \approx 17{,}7\,rad/s$

Q3 : $M\varphi = 180 + Arg\left(H_{bO}(j\omega_{co})\right) = 180 - Arctan\left(\frac{\omega_{co}}{1{,}25}\right) - Arctan\left(\frac{\omega_{co}}{5}\right) \approx 20°$

Q4 : Correcteur proportionnel intégral qui augmente la classe de la FTBO (gain ∞ à BF) sans nuire à la stabilité (action proportionnelle à HF)

Q5 :

- « une décade avant la pulsation critique de H(p) » $\Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_{co}}{10} \Rightarrow \tau = 0{,}56\,s$
- marge de phase de 45° : on cherche la pulsation pour laquelle la phase vaut -135°

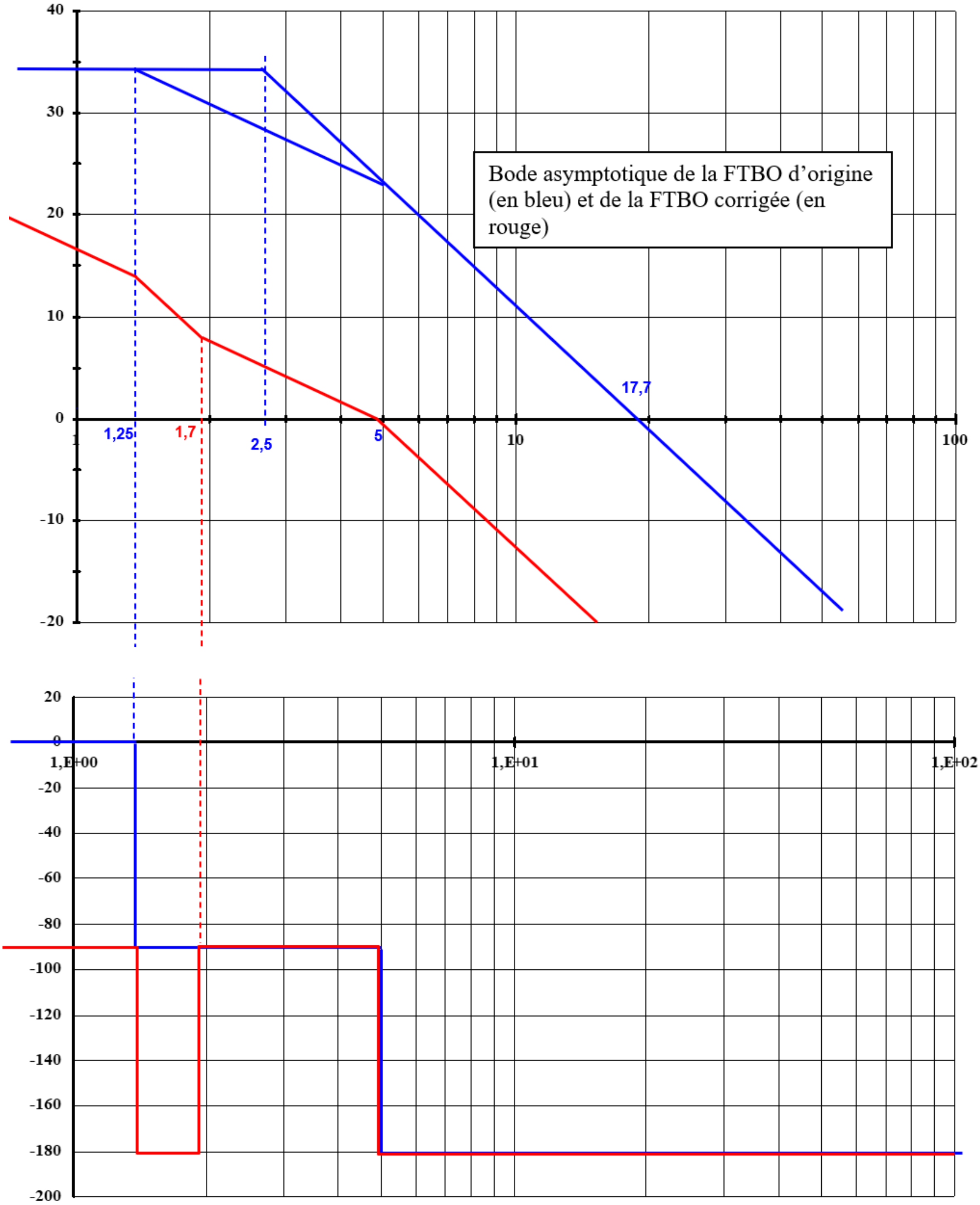
$$M\varphi = 45 = 180 + Arg\left(C(j\omega)H_{bO}(j\omega)\right) \Rightarrow -135° = -90° + \arctan(\tau\omega) - Arctan\left(\frac{\omega}{1{,}25}\right) - Arctan\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

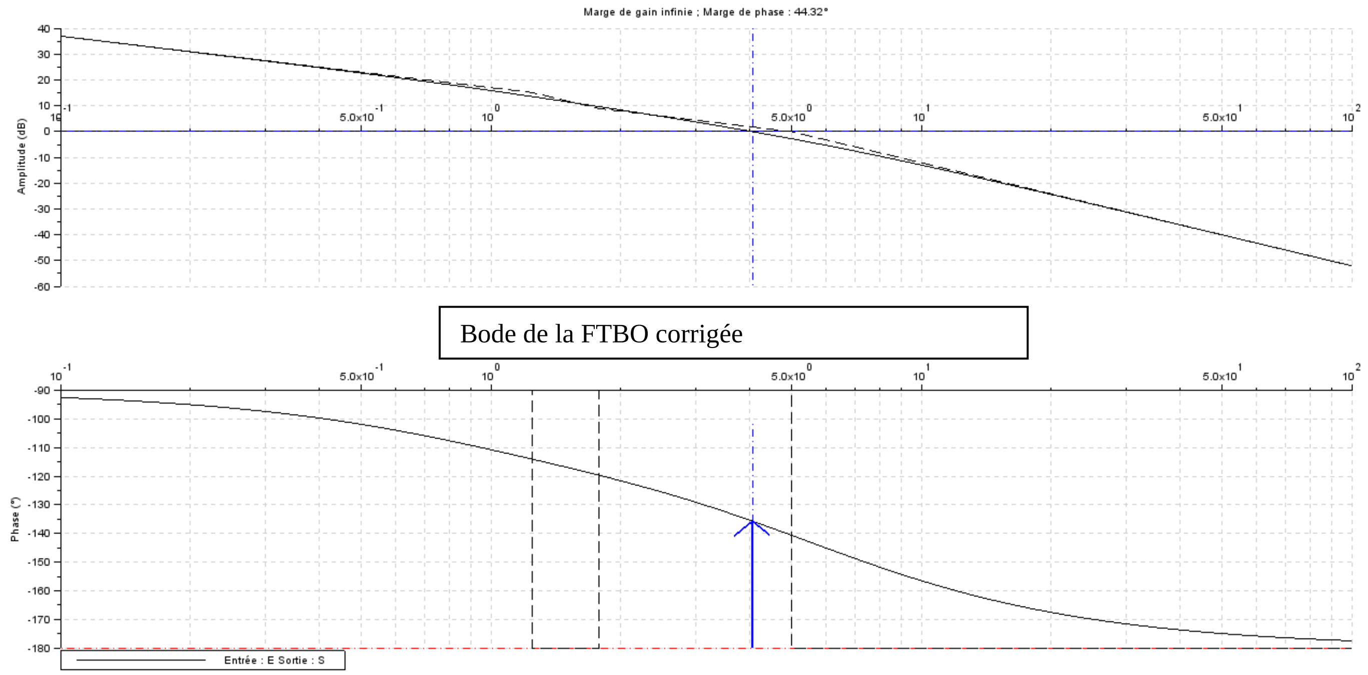
Soit $\arctan(\tau\omega) - Arctan\left(\frac{\omega}{1{,}25}\right) - Arctan\left(\frac{\omega}{5}\right) = -45° \Rightarrow \omega \approx 4\,rad/s$. C'est la pulsation où le gain de la FTBO corrigée doit être nulle ($\omega_{co\,cor} = \omega = 4rad/s$) $\Rightarrow 20log|C(j\omega_{co\,cor})H_{bO}(j\omega_{co\,cor})| = O$

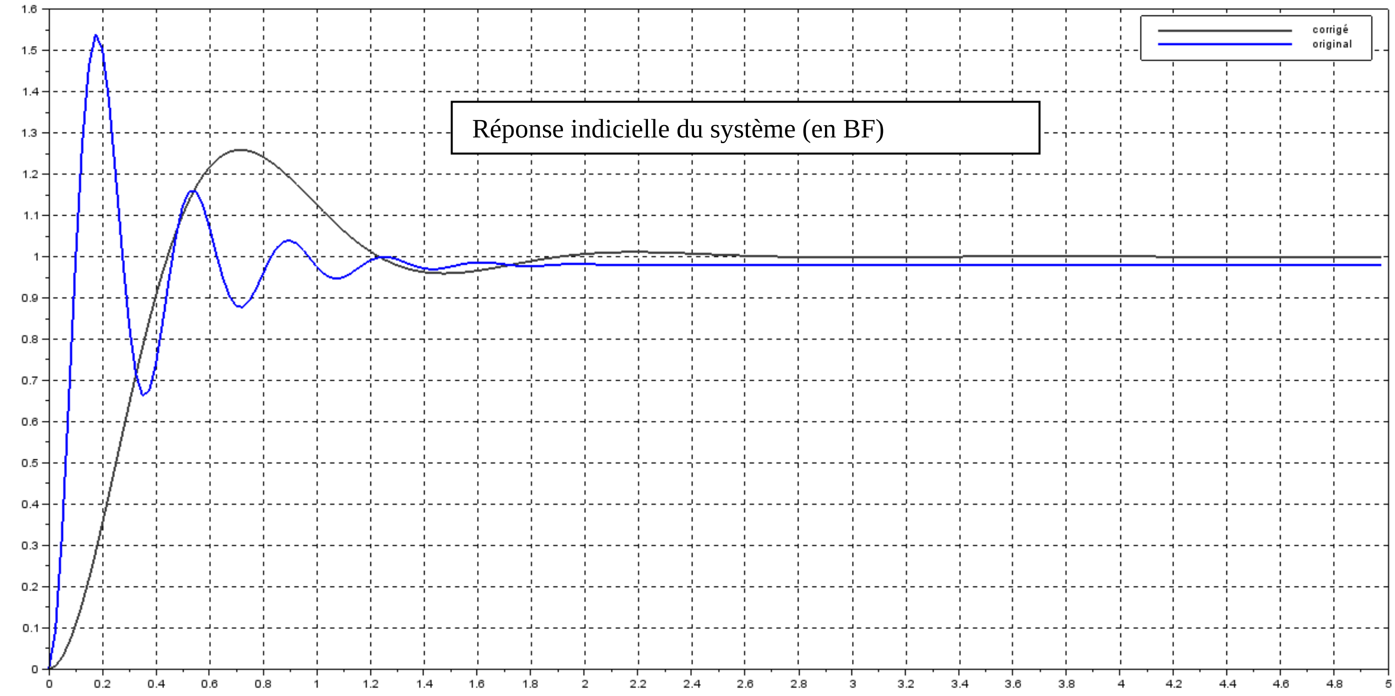
D'où : $\frac{1250.K.\sqrt{1+(\tau\omega_{co\,cor})^2}}{\tau\omega_{co\,cor}.4.\sqrt{(1{,}25)^2+(\omega_{co\,cor})^2}.\sqrt{(5)^2+(\omega_{co\,cor})^2}} = 1 \Rightarrow K = 0{,}14$

Q6 :

Bande Passante à OdB : $]O; 5\,rad/s]$ à partir du tracé asymptotique ou $]O; 5\,rad/s]$ à partir du tracé réel.


Bode asymptotique de la FTBO d'origine (en bleu) et de la FTBO corrigée (en rouge)
40
30
20
10
0
-10
-20
1,25
1,7
2,5
5
10
100
17,7
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
1,E+00
1,E+01
1,E+02

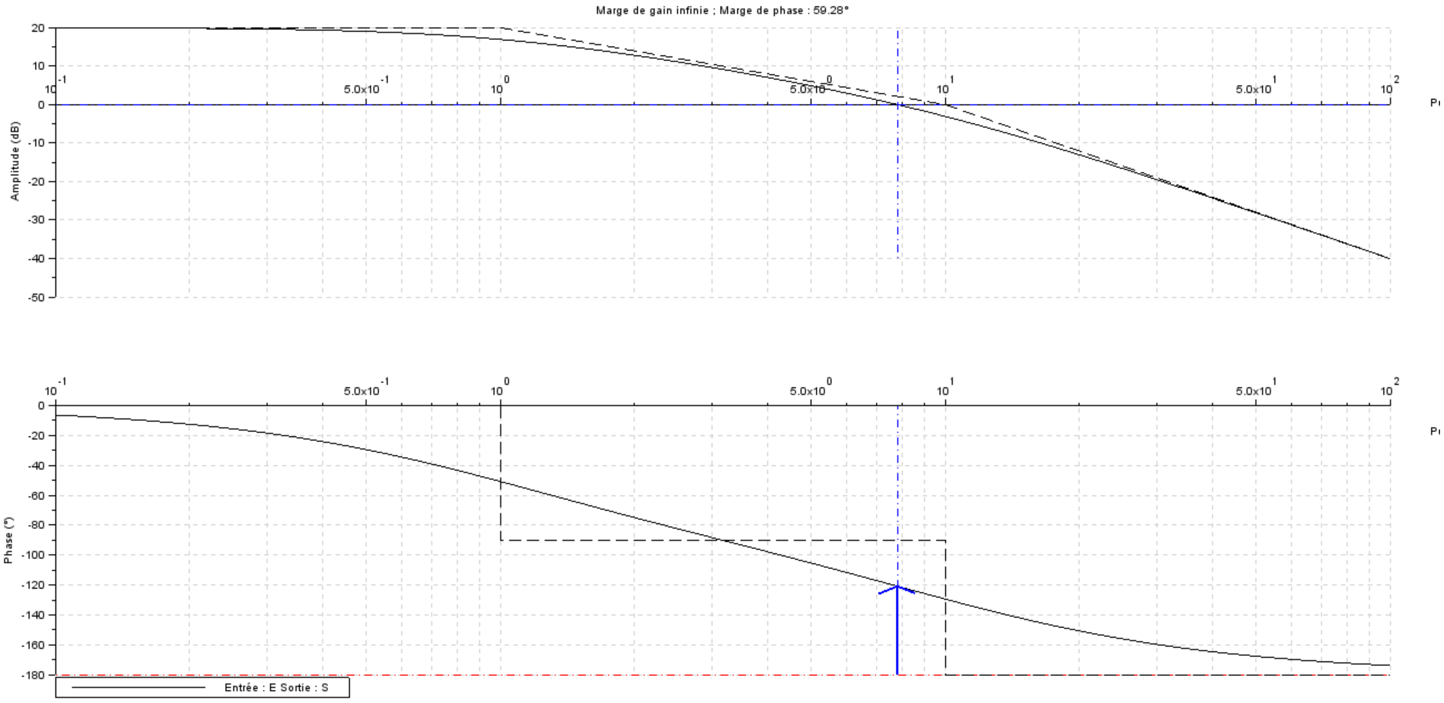




Exercice 9 : Etude d'une correction par compensation de pôle dominant

Q1 - $M\varphi = 180 - \arctan \omega_{co} - \arctan(\omega_{co}/10) = 51°$ avec $\omega_{co} = 10\ rad/s$ si on utilise le tracé asymptotique.

Avec les tracés réels : Mφ =59° et $\omega_{co} \approx 8\ rad/s$



Q2 - FTBF $= \dfrac{\frac{10}{11}}{1+\frac{11}{110}p+\frac{1}{110}p^2}$ GS = $\frac{10}{11}$ ω_0 = 10.5rad/s m= 0.52

- $d_1 = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 14\%$
- $\varepsilon_S = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$

Q3 - Mφ =45° ⇒ $M\varphi = 180 - arctan\ \omega_{co} - arctan(\omega_{co}/10) = 45°$ ⇒ $\omega_{co} = 11{,}84\ rad/s$ ⇒ GdB =
GdB $= 20log100 - 20log\sqrt{1+\omega_{co}{}^2} - 20log\sqrt{100+\omega_{co}{}^2} = -5.3$

Donc K = $10^{\frac{5.3}{20}} = 1.8$

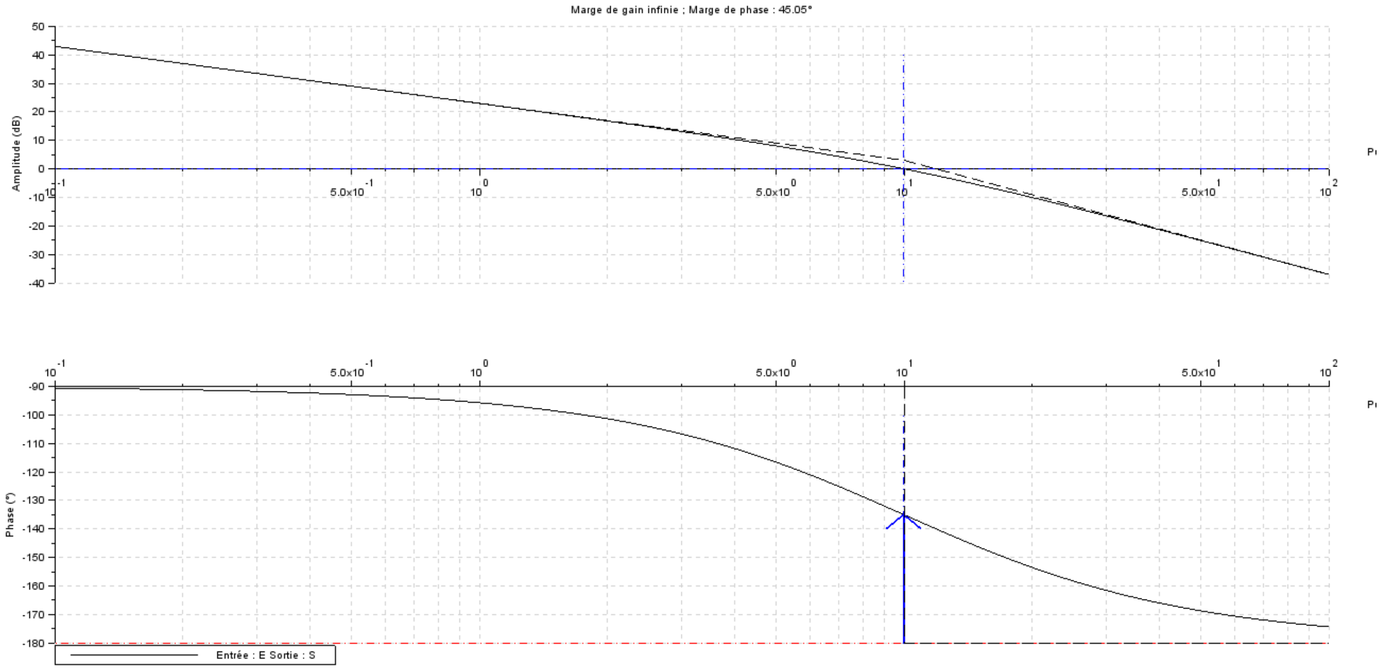
FTBFc $= \dfrac{\frac{180}{190}}{1+\frac{11}{190}p+\frac{1}{190}p^2}$ GSc = $\frac{18}{19}$ ω_{oc} =13.8 rad/s m_c= 0.4

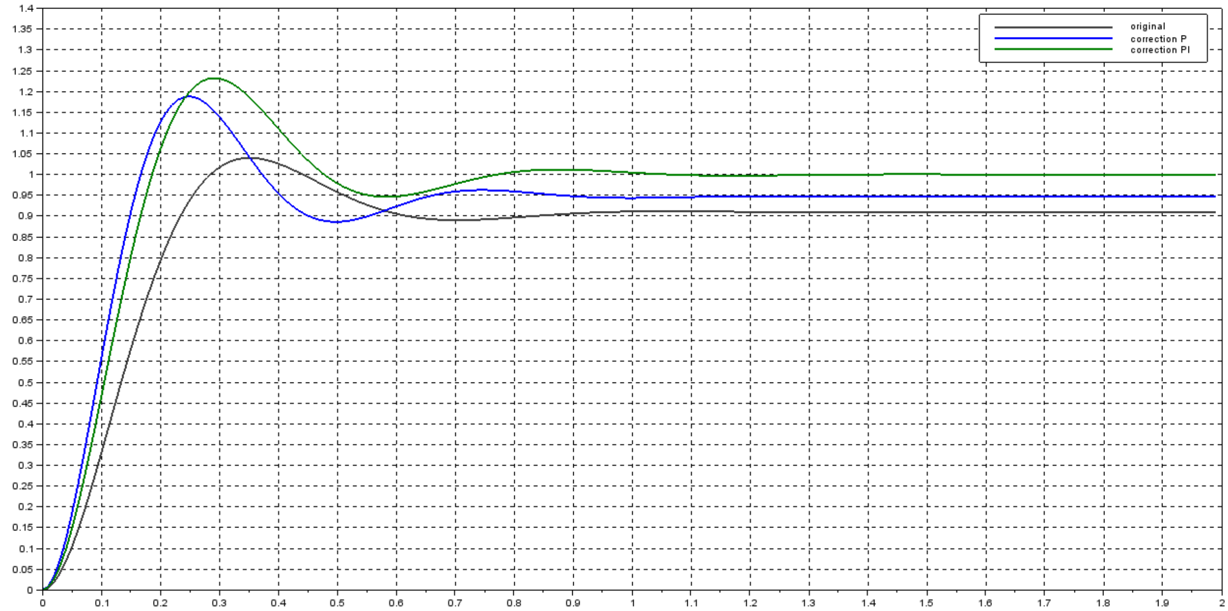
- $d_1 = e^{-\frac{\pi\, m_c}{\sqrt{1-m_c{}^2}}} = 26\%$
- $\varepsilon_{SC} = 1 - \frac{18}{19} = \frac{1}{19}$

Q4 – rendre le système précis. Le pôle dominant de la FTBO est -1. On garde le pôle -10. D'où τ =1s.

$$\text{FTBOc} = \frac{100K(1+\tau p)}{(1+p)(10+p)\tau p} = \frac{100K}{(10+p)p}$$

$M\varphi = 180 - 90 - arctan(\omega_{co}/10) = 45°$ ⇒ $\omega_{co} = 10\ \text{rad/s}$ ⇒ GdB = 20log100+20logK - 20log$\sqrt{1+\omega_{co}{}^2}$- 20log10 ⇒ K = 1.41





Exercice 10 : In fluence d'un correcteur à avance de phase

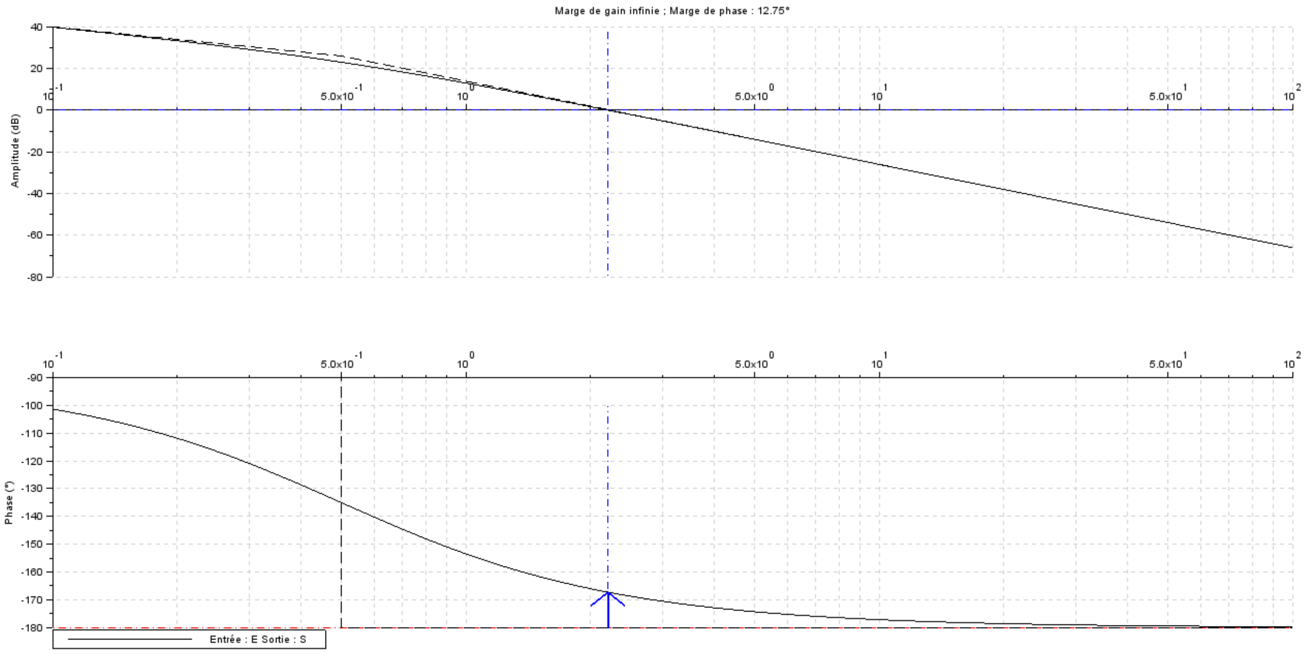
Q1 - FTBF = $\frac{1}{1+0.1p+0.2p^2}$ GS = 1 ω_0 = 2.23rad/s m = 0.11

- $d_1 = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 70\%$
- $\varepsilon_S = 1 - 1 = 0$

Q2 – On utilise le tracé asymptotique : $\frac{?_{dB}-20\log(100)}{\log(0,5)-\log(0,1)} = -20 \Rightarrow ?_{dB} = 26dB$

Puis : $\frac{0-26}{\log(\omega_{co})-\log(0,5)} = -40 \Rightarrow \omega_{co} \approx 2,23 rad/s \Rightarrow M\varphi = 180 - 90 - \arctan(2\omega_{co}) = 12,6°$

MG = ∞

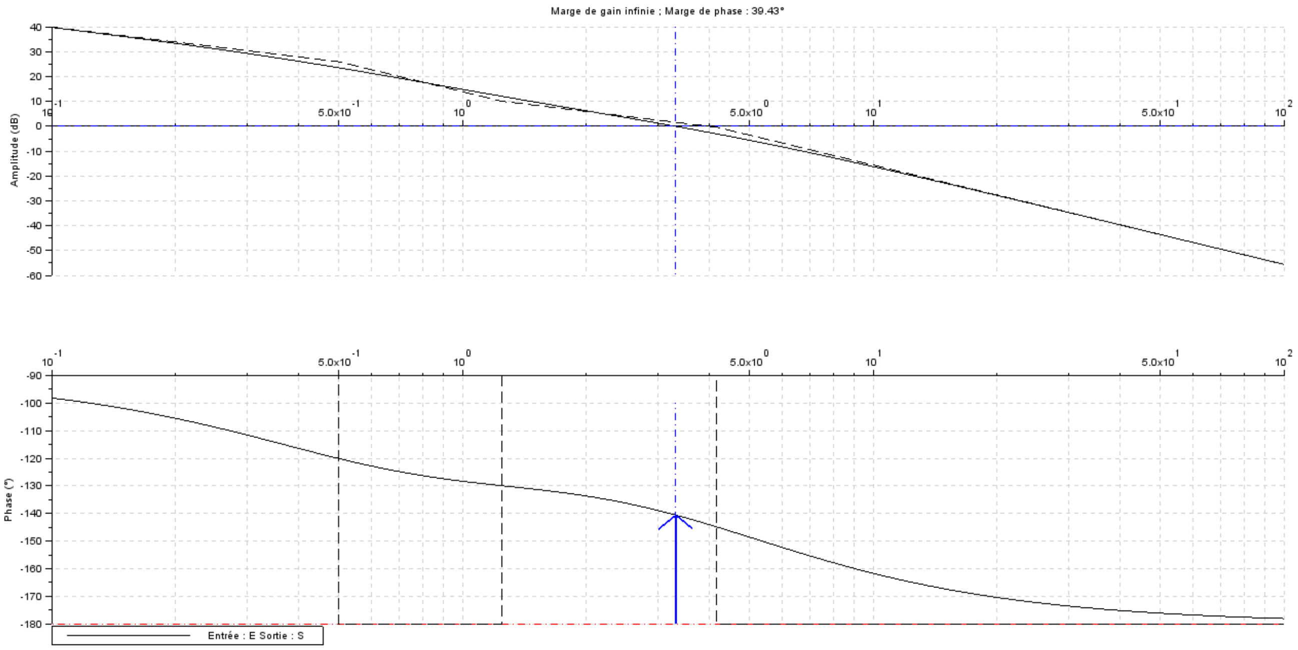


Q3 – pas assez de phase. Système trop oscillant donc lent. Correcteur à avance de phase.

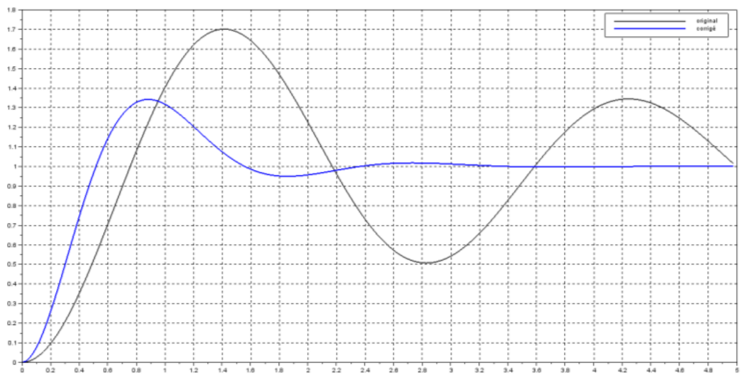
$$FTBFc = \frac{10(1+0.8p)}{p(1+2p)(1+0.24p)+10(1+0.8p)} = \frac{10+8p}{0.48p^3+2.24p^2+9p+10}$$

G.S. : 1 donc $\varepsilon_s = 0$

Q4 -



$M\varphi = 40°$ $MG = \infty$



Système toujours précis, plus rapide, avec moins de dépassement