

Exercice 1 : moments d'inertie et matrices d'inertie élémentaires

Q1 : $I(O, \vec{z}) = m \frac{R^2}{2}$

Q2 : $I(O) = \frac{3}{5} m \frac{R^2}{2}$ et $I(O, \vec{z}) = \frac{2}{5} m \frac{R^2}{2}$

Q3 :
$$I_{O, \vec{z}} = \begin{pmatrix} m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) & 0 & 0 \\ 0 & m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Q4 :
$$I_{O, \vec{z}} = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Exercice 2 : matrice d'inertie d'un vilebrequin

Q1 : $I(G_1, \vec{z}) = m_1 \frac{R_1^2}{2} + m_2 \frac{R_2^2}{2} + m_2 \frac{a_2^2}{2} + m_3 \frac{R_3^2}{2} + m_3 \frac{a_3^2}{2}$

Q2 : $I(G_1) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & I(G_1, \vec{z}) \end{bmatrix}$

avec $A = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 \frac{c_2^2}{2} + m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} \right) + m_3 \frac{c_3^2}{2}$

et $B = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{a_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{2} \right) + m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} \right) + m_3 \left(\frac{a_3^2}{2} + \frac{c_3^2}{2} \right)$

et $E = m_2 a_2 c_2 + m_3 a_3 c_3$

Exercice 3 : inertie du robot de chirurgie mini-invasive (extrait E3a MP 2019)

Q1 : Le modèle géométrique présentée fait apparaitre un plan de symétrie : Le plan $(O_1, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$. Les produits d'inertie $-D = \iint y \cdot z \cdot dm$ et $-F = \iint x \cdot y \cdot dm$ sont donc nuls.

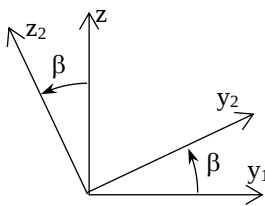
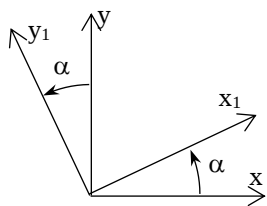
Q2 : Juste une lecture de la matrice : $J_1 = 8400 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

Q3 : Les dimensions du moteur sont petites devant la distance du centre de masse G_{M2} à l'axe de rotation.

Q4 : $J_{M2} = m_{M2} \cdot x_{1M2}^2 = 0,6 \times (211)^2 = 26700 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

Q5 : Inertie max : A Inertie mini : F

Exercice 4 : calculs d'éléments dynamiques d'une éolienne domestique



$$\vec{\Omega}(1/R) = \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta} \vec{x}_1$$

Q1 : torseur cinématique de 1/R :
$$V_{(1/R)} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

torseur cinématique de 2+3/R :
$$V_{(2+3/R)} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/R) = \vec{\Omega}(3/R) \\ \vec{V}(P \in 2/R) = \vec{V}(P \in 3/R) \end{Bmatrix}_P$$

$$\vec{\Omega}(2/R) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/R) = \dot{\beta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\vec{V}(P \in 2/R) = \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a\vec{x}_1 + b\vec{z}_2)}{dt} \right]_R \text{ avec } \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(2/R) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\beta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}) \wedge \vec{z}_2$$

soit
$$V_{(2+3/R)} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z} + \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 - b \dot{\beta} \vec{y}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q2} : \vec{\sigma}_O(1/R) = \mathbb{I}_O(1) \cdot \vec{\Omega}(1/R) \quad \text{avec} \quad \mathbb{I}_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & I \end{pmatrix}_{R_1} \quad \text{soit} \quad \vec{\sigma}_O(1/R) = \dot{\alpha} (-E_1 \vec{x}_1 + I \vec{z})$$

donc $\boxed{\vec{\sigma}_O(1/R) \cdot \vec{z} = I \dot{\alpha}}$

$$\mathbf{Q3} : \mathbf{C}_{(2/R)} = \begin{Bmatrix} M \vec{V}(G \in 2/R) \\ \vec{\sigma}_O(2/R) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{V}(G \in 2/R) = \left[\frac{d\vec{OG}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a\vec{x}_1)}{dt} \right]_R = a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_O(2/R) = \vec{\sigma}_G(2/R) + \vec{OG} \wedge M \vec{V}(G \in 2/R) = \mathbb{I}_G(2) \cdot \vec{\Omega}(2/R) + a \vec{x}_1 \wedge M a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

La matrice de 2 étant exprimée dans la base R_2 , on doit projeter $\vec{\Omega}(2/R)$ sur cette même base :

$$\dot{\beta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z} = \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} (\sin \beta \vec{y}_2 + \cos \beta \vec{z}_2)$$

$$\vec{\sigma}_G(2/R) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R_2} = A \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} (B \sin \beta \vec{y}_2 + C \cos \beta \vec{z}_2)$$

d'où $\boxed{\mathbf{C}_{(2/R)} = \begin{Bmatrix} M a \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ M a^2 \dot{\alpha} \vec{z} + A \dot{\beta} \vec{x}_1 + B \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2 \end{Bmatrix}}$

$$\mathbf{C}_{(3/R)} = \begin{Bmatrix} m \vec{V}(P \in 3/R) \\ \vec{\sigma}_O(3/R) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{\sigma}_O(3/R) = \vec{\sigma}_P(3/R) + \vec{OP} \wedge m \vec{V}(P \in 3/R) \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_P(3/R) = \mathbb{I}_P(3) \cdot \vec{\Omega}(3/R)$$

3 étant une masse ponctuelle, elle est sans dimension donc $\mathbb{I}_P(3)$ est la matrice nulle.

$$\vec{\sigma}_O(3/R) = (a \vec{x}_1 + b \vec{z}_2) \wedge m(a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 - b \dot{\beta} \vec{y}_2)$$

d'où $\boxed{\mathbf{C}_{(3/R)} = \begin{Bmatrix} m(a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 - b \dot{\beta} \vec{y}_2) \\ m[a^2 \dot{\alpha} \vec{z} + b(b \dot{\beta} - a \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{x}_1 + b^2 \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 - a b \dot{\beta} \vec{z}_2] \end{Bmatrix}}$

$$\mathbf{Q4} : \quad \boxed{\vec{\delta}_O(1/R) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt_{/R}} \vec{\sigma}_O(1/R) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt_{/R}} (\vec{\sigma}_O(1/R) \cdot \vec{z}) = I \ddot{\alpha}} \quad \text{rotation autour d'un axe fixe}$$

$$\mathbf{Q5} : \vec{\delta}_O(2/R) \cdot \vec{z} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(2/R)}{dt} \right]_R \cdot \vec{z} = \frac{d(\vec{\sigma}_O(2/R) \cdot \vec{z})}{dt} \quad \text{car O et } \vec{z} \text{ sont fixes dans R}$$

d'où $\boxed{\vec{\delta}_O(2/R) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt} [(M a^2 + B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta) \dot{\alpha}]}$

$$\mathbf{Q6} : \vec{\delta}_O(3/R) \cdot \vec{x}_1 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(3/R)}{dt} \right]_R \cdot \vec{x}_1 = \frac{d(\vec{\sigma}_O(3/R) \cdot \vec{x}_1)}{dt} - \vec{\sigma}_O(3/R) \cdot \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_R \quad (\text{car O fixe dans R mais pas } \vec{x}_1)$$

$$= m b \frac{d}{dt} (b \dot{\beta} - a \dot{\alpha} \cos \beta) - m[a^2 \dot{\alpha} \vec{z} + b(b \dot{\beta} - a \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{x}_1 + b^2 \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 - a b \dot{\beta} \vec{z}_2] \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

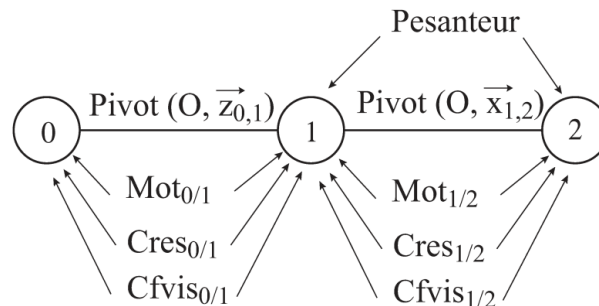
d'où $\boxed{\vec{\delta}_O(3/R) \cdot \vec{x}_1 = m b (b \ddot{\beta} - a \ddot{\alpha} \cos \beta - b \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta)}$

Exercice 6 : équations de Mouvement complexes de la station de mesures topo (extrait Centrale MP 2017)

Q1 : Les deux angles n'étant pas coplanaires, il faut dessiner deux figures de changement de bases.

$$\vec{OP} = D \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ D \cos \theta \\ D \sin \theta \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -D \cos \theta \sin \varphi \\ D \cos \theta \cos \varphi \\ D \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0} \Rightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} -D \cos \theta \sin \varphi \\ D \cos \theta \cos \varphi \\ D \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0}$$

Q2 :



Q3 :

	Ensemble isolé	Equation scalaire	Justification
(E1)	1 & 2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$	On utilise le fait que le moment en (O sur $(\vec{z}_{0,1})$ est nul dans la liaison pivot entre (0) et (1) (<i>les actions mécaniques dans les pivots n'interviendront pas</i>), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.
(E2)	2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$	On utilise le fait que le moment en (O sur $(\vec{x}_{1,2})$ est nul dans la liaison pivot entre (1) et (2) (<i>les actions mécaniques dans la pivot n'interviendront pas</i>), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.

Q4 :

A) On isole (1 & 2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$:

$$\overrightarrow{\Sigma M_{\text{ext} \rightarrow 1 \cup 2}^O} \cdot \vec{z}_{0,1} = \left(\overrightarrow{\delta_{1/0}^O} + \overrightarrow{\delta_{2/0}^O} \right) \cdot \vec{z}_{0,1}$$

$$0 + 0 + \frac{k_1}{\rho_1} \cdot (c_{m1} + c_{r1} - f_{\text{Eq1}} \cdot \dot{\varphi}) = \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{1/0}^O} \cdot \vec{z}_{0,1})}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{2/0}^O} \cdot \vec{z}_{0,1})}{dt} \quad (\text{car } O \text{ est centre d'inertie des pièces 1 et 2}).$$

Remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur $\vec{z}_{0,1}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 0 et 1.

Avec $\vec{\sigma}_{2/0}^O = I(O,2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = \begin{bmatrix} J_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z2} \end{bmatrix}_{(O,B_2)} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \cdot \sin \theta \\ \dot{\phi} \cdot \cos \theta \end{bmatrix}_{(B_2)} = \begin{bmatrix} J_{x2} \cdot \dot{\theta} \\ J_{y2} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \theta \\ J_{z2} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ (car O est centre d'inertie de 2) ;

de plus $\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ d'où $\frac{k_1}{\rho_1} \cdot (c_{m1} + c_{r1} - f_{Eq1} \cdot \dot{\phi}) = J_{z1} \cdot \ddot{\phi} + \frac{d(J_{z2} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2 \theta + J_{y2} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin^2 \theta)}{dt}$

Il vient : $c_{m1} + c_{r1} = J_{z1} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \ddot{\phi} + f_{Eq1} \cdot \dot{\phi} + \frac{d\left(J_{z2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2 \theta + J_{y2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin^2 \theta\right)}{dt}$

Nous obtenons la première équation avec : $A_1 = J_{z1} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$, $B_1 = f_{Eq1}$; $C_{11} = J_{y2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$; $C_{12} = J_{z2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$

B) On isole (2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$:

$\Sigma \vec{M}_{ext \rightarrow 2}^O \cdot \vec{x}_{1,2} = \vec{\delta}_{2/0}^O \cdot \vec{x}_{1,2} = \frac{d(\vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \vec{x}_{1,2})}{dt} - \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \left(\frac{d\vec{x}_{1,2}}{dt}\right)_0$ (car O est centre d'inertie de la pièce 2).

$0 + 0 + \frac{k_2}{\rho_2} \cdot (c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2} \cdot \dot{\theta}) = J_{x2} \cdot \ddot{\theta} - \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{y}_1$ (remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur

$\vec{x}_{1,2}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 1 et 2). $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$

D'où $\frac{k_2}{\rho_2} \cdot (c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2} \cdot \dot{\theta}) = J_{x2} \cdot \ddot{\theta} - (J_{y2} - J_{z2}) \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$

Il vient : $c_{m2} + c_{r2} = J_{x2} \cdot \frac{\rho_2}{k_2} \cdot \ddot{\theta} + f_{Eq2} \cdot \dot{\theta} + (J_{z2} - J_{y2}) \cdot \frac{\rho_2}{2 \cdot k_2} \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(2\theta)$

Nous obtenons la deuxième équation avec : $A_2 = J_{x2} \cdot \frac{\rho_2}{k_2}$, $B_2 = f_{Eq2}$; $C_2 = (J_{z2} - J_{y2}) \cdot \frac{\rho_2}{2 \cdot k_2}$

Q5 : Dans le cas particulier où $\theta = 0^\circ$, nous obtenons : $c_{m1} + c_{r1} = A_1 \cdot \ddot{\phi} + B_1 \cdot \dot{\phi} + C_{12} \cdot \dot{\phi}$ &

$c_{m2} + c_{r2} = A_2 \cdot \ddot{\theta} + B_2 \cdot \dot{\theta}$

Ce qui donne :

$$C_{m1} + C_{r1} - B_1 \rho_1 \omega_{m1} = (A_1 + C_{12}) \rho_1 \dot{\omega}_{m1} = J_{eq1} \dot{\omega}_{m1}$$

$$C_{m2} + C_{r2} - B_2 \rho_2 \omega_{m2} = A_2 \rho_2 \dot{\omega}_{m2} = J_{eq2} \dot{\omega}_{m2}$$

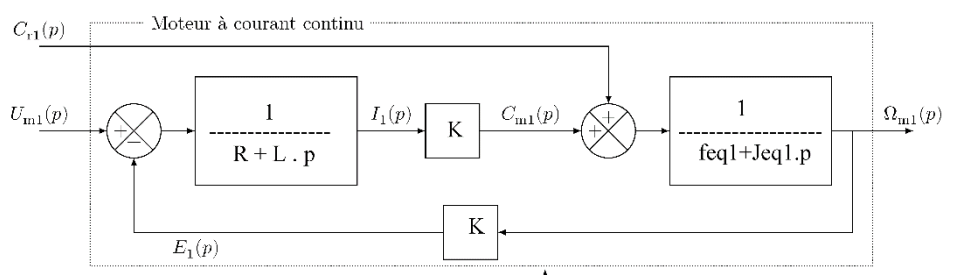
D'où : $J_{eq1} = (A_1 + C_{12}) \rho_1 = \frac{\rho_1^2}{k_1} (J_{z1} + J_{z2})$ $J_{eq2} = A_2 \rho_2 = \frac{\rho_2^2}{k_2} J_{x2}$

Q6 :

Le bloc laissé vide dans le schéma-bloc est un intégrateur dont la

fonction de transfert est $\frac{1}{p}$. En effet,

l'entrée de ce bloc est $\Omega_{m1}(p)$ alors que la sortie est $\theta_{m1}(p)$.



— — — —

