

Problème N°1 :

Q1a $\left\{ T_{Sol \rightarrow roues\ avant} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{N, Rf}$

Ponctuelle de normale ($N, \vec{z}_f$) pour laquelle l'effort tangentiel est négligé.

Justification : TMD en A sur la roue avant en projection sur $\vec{y}_f$:

$$\overrightarrow{M_{A, pes \rightarrow roue\ avant}} \cdot \vec{y}_f + \overrightarrow{M_{A, pivot\ fauteuil \rightarrow roue\ avant}} \cdot \vec{y}_f + \overrightarrow{M_{A, sol \rightarrow roue\ avant}} \cdot \vec{y}_f = \overrightarrow{\delta_{A, roue\ avant/0}} \cdot \vec{y}_f = 0$$

Pesanteur négligée + pivot fauteuil/roue axe avant ($A, \vec{y}_f$) sans frottement + inertie négligée $\Rightarrow$

$$R_{\text{rayon roue avant}} \cdot X_N = 0 \Rightarrow X_N = 0$$

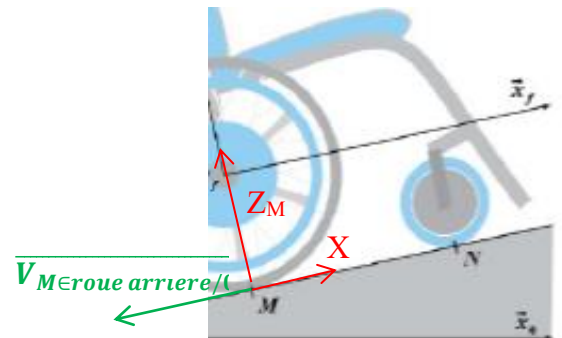
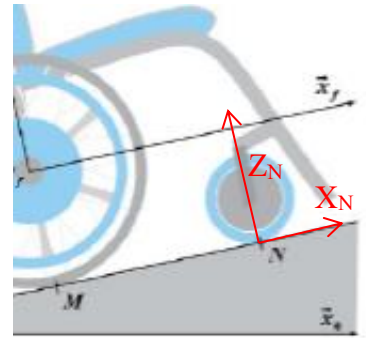
Remarque : ce n'est pas le cas pour la roue arrière qui est motorisée. Il y a le couple moteur qui intervient dans le TMD (voir Q4).

Q1b $\left\{ T_{Sol \rightarrow roues\ arriere} \right\} = \begin{Bmatrix} X_M & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{M, Rf}$

Ponctuelle de normale ($M, \vec{z}_f$) avec frottement donc une composante tangentielle (du sol sur la roue) opposée à la vitesse de glissement (de la roue par rapport au sol quand ça glisse) :

$$\overrightarrow{V_{M \in roue\ arriere/0}} = -R_{\text{rayon roue arriere}} \cdot \omega_{\text{roue arriere/fauteuil}} \vec{x}_f$$

Q1c $\left\{ T_{Poids \rightarrow fauteuil} \right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_S g & 0 \end{Bmatrix}_{G, R}$ Glisseur en G de porté par $-\vec{z}_0$



Q2 : Pour une roue avant par exemple sachant que A n'est pas un point fixe du repère galiléen (0) lié au sol, on reprend les formules les plus générales :

$$\overrightarrow{\delta_{A, roue/0}} = \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A, roue\ avant/0}} + m_r \overrightarrow{V_{A/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{roue\ avant/0}}}$$

$$\cdot \quad G_{roue\ avant} = A \Rightarrow m_r \overrightarrow{V_{A/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{roue\ avant/0}}} = \vec{0}$$

$$\cdot \quad \overrightarrow{\sigma_{A, roue\ avant/0}} = I_{A, roue\ avant} \cdot \overrightarrow{\Omega_{roue\ avant/0}} + m_r \overrightarrow{AG_{roue\ avant}} \wedge \overrightarrow{V_{A \in roue\ avant/0}}$$

$$\cdot \quad G_{roue\ avant} = A \Rightarrow m_r \overrightarrow{AG_{roue\ avant}} \wedge \overrightarrow{V_{A \in roue\ avant/0}} = \vec{0}$$

$$\cdot \quad I_{A, roue\ avant} = 0 \text{ inertie négligée}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{\delta_{A, roues\ avant/0}} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{\delta_{A, roues\ arrieres/0}} = \vec{0}$$

On finit avec Babar : $\overrightarrow{\delta_{G, roues\ avant/0}} = \overrightarrow{\delta_{A, roues\ avant/0}} + \overrightarrow{GA} \wedge m_r \overrightarrow{I_{A/0}} = \vec{0}$ car masse négligée devant celle du fauteuil.

Du coup, tout est nul...

Il faut comprendre ce calcul mais ne pas le refaire...

L'utilisateur et le fauteuil se déplacent en ligne droite : il n'y a pas de mouvement de rotation .

$\vec{\delta}_{G, utilisateur+fauteuil/0} = \vec{0}$. Résultat du cours à connaître **par cœur**. Il faut être au centre de gravité et dans un mouvement de translation (rectiligne ou circulaire) pour écrire que le moment dynamique est nul.

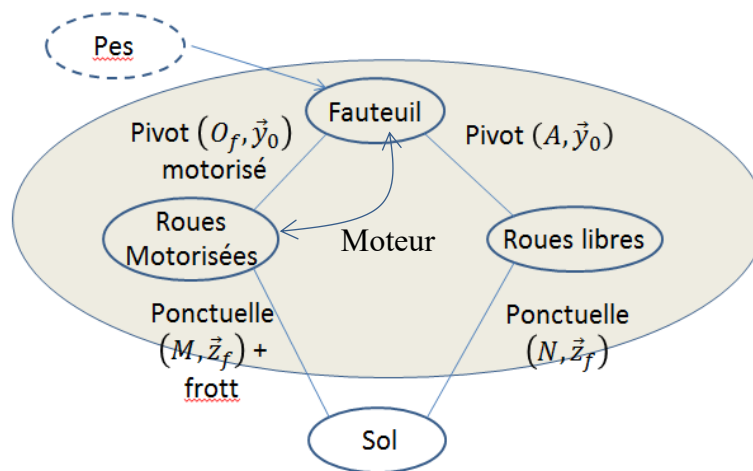
$$\text{Donc : } \vec{\delta}_{G, S/0} = \vec{\delta}_{G, utilisateur+fauteuil/0} + \vec{\delta}_{G, roues\ avant/0} + \vec{\delta}_{G, roues\ arriere/0} = \vec{0}$$

Remarque : la justification doit être précise. Fauteuil+utilisateur translatent mais roues translatent et tournent !!!

Q3 : Le problème étant considéré comme plan, deux équations scalaires proviennent de l'application du théorème de la résultante dynamique au système S en projection sur les axes $\vec{x}_f$ et $\vec{z}_f$. La troisième équation scalaire provient de l'application du théorème du moment dynamique au système S en projection sur l'axe $(G, \vec{y}_f)$.

Les masses et inerties des roues motorisées sont négligeables, donc la résultante dynamique du système S est égale à la résultante dynamique du fauteuil et de l'utilisateur qui ont un mouvement de translation dirigé selon $\vec{x}_f$:

$$M_S \vec{a}(G, S/R_0) = M_S \ddot{x}(t) \vec{x}_f$$



Les actions des forces électromagnétiques (moteurs) sur les roues et sur le fauteuil s'annulent. Rappel : $\alpha \leq 0$, on obtient donc :

$$(1) \quad X_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t)$$

interprétation : $\alpha < 0$ ($\vec{y}_f$ part dans le fond...). Pour atteindre l'équilibre il faut produire grâce au couple moteur un effort tangentiel permettant au moins de compenser les effets de pesanteur (suivant l'axe du sol) : $X_M = -M_S g \sin \alpha$.

Pour accélérer, il faut que cet effort tangentiel soit supérieur à $-M_S g \sin \alpha$ (qui est positif). Cela nécessite donc un couple supérieur fourni par le moteur...

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$$

interprétation : combinée avec le TMD cette équation traduit la répartition des efforts normaux. Plus la pente de la rampe va être grande plus les roues arrières sont chargées (Z_M grand)

Les 2 composantes Z_M et Z_N sont positives.

$$\vec{M}_{G, \text{Sol} \rightarrow \text{roues avant}} \cdot \vec{y}_f = (\vec{GN} \wedge Z_N \vec{z}_f) \cdot \vec{y}_f = [(-h \vec{z}_f + e \vec{x}_f) \wedge Z_N \vec{z}_f] \cdot \vec{y}_f = -e Z_N$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{G, \text{Sol} \rightarrow \text{roues arriere}} \cdot \vec{y}_f &= (\vec{GM} \wedge [X_M \vec{x}_f + Z_M \vec{z}_f]) \cdot \vec{y}_f \\ &= [(-h \vec{z}_f - l \vec{x}_f) \wedge [X_M \vec{x}_f + Z_M \vec{z}_f]] \cdot \vec{y}_f = -h X_M + l Z_M \end{aligned}$$

$$(3) \quad -e Z_N - h X_M + l Z_M = 0$$

- On applique le TMD forcément en G à cause de Q2. On notera que la composante tangentielle X_M produit un moment < 0 . Z_N produit un moment < 0 et Z_M un moment > 0 .

- A chaque fois, on peut calculer ces moments par force*bras de levier. Le produit vectoriel de Babar n'est pas indispensable...
- N'oubliez pas que le PFD se traduit par le TRD et le TMD !!!!! dans un pb plan comme ici cela donne 3 équations scalaires.
- Pas de gros calculs de dynamique ici : le moment dynamique est nul et la résultante dynamique c'est masse*accélération suivant $\vec{x}_f$...
- Attention : Cred est le couple à la sortie du réducteur qui fait tourner les roues arrière motrices. Il provient du couple moteur du stator fixé au fauteuil sur le rotor fixé aux roues. Il est donc interne au système isolé. Il ne fait pas partie du BAME !!! Il est dans le BAME quand on isole les roues arrière (Q4)

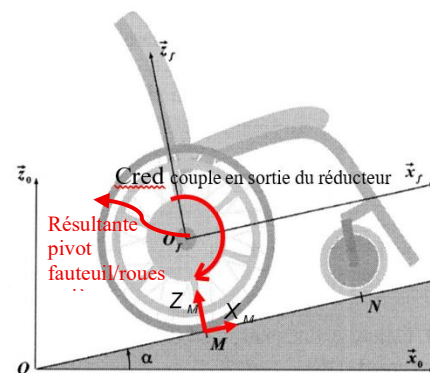
Q4 : A la limite du glissement, on a d'après la loi de Coulomb : (4) $X_M = fZ_M$

Rappel : $\alpha \leq 0$ ($\vec{y}_f$ part dans le fond...)

Remarque :

Le fauteuil monte donc l'action tangentielle du sol sur les roues motorisées est dirigée selon $+\vec{x}_f$:

- les roues motorisées arrière sont en équilibre puisque leur masse et leur inertie sont négligées. Le TMD au centre des roues arrière vaut 0.
- en appliquant le théorème du moment statique en projection sur l'axe $(O_f, \vec{y}_f)$ aux roues motorisées, on trouve que X_M est dirigé selon $+\vec{x}_f$



$$Cred - RX_M = 0 \Rightarrow X_M > 0 \text{ permet de retrouver le sens de l'action tangentielle}$$

On a donc le système d'équations suivant :

$$(1) \quad fZ_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t)$$

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$$

$$(3) \quad -eZ_N - hfZ_M + lZ_M = 0$$

Résolution :

$$e \times (2) + (3) \Leftrightarrow (e + l - hf)Z_M = eM_S g \cos \alpha$$

D'où :

$$\ddot{x}(t) = g \left[\sin \alpha + \frac{fe \cos \alpha}{(e+l-hf)} \right]$$

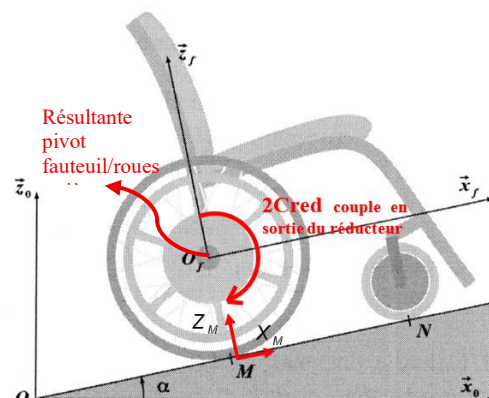
Application numérique : on a alors $\tan|\alpha| = \frac{12}{100}$ pour une pente de 12%, d'où $\alpha = -6,8^\circ \Rightarrow \ddot{x} = 4,15 m \cdot s^{-2}$

Q5 : On tient compte du fait qu'il y a deux motoréducteurs et qu'on considère le problème comme plan.

Le système isolé est à présent constitué des deux roues motorisées. La masse et l'inertie de ces roues étant négligées, on applique le théorème du moment dynamique équivalent au théorème du moment statique ici en projection sur l'axe $(O_f, \vec{y}_f)$:

$$\vec{M}_{O_f, \text{Sol} \rightarrow \text{roues arrière}} \cdot \vec{y}_f + \vec{M}_{O_f, \text{motoréducteurs} \rightarrow \text{roues arrière}} \cdot \vec{y}_f = 0$$

le moment en O_f projeté sur $\vec{y}_f$ du torseur de la liaison pivot fauteuil/roues arrière vaut 0 (liaison sans frottement).



$$\vec{M}_{O_f, Sol \rightarrow roues\ arri\ere} \cdot \vec{y} f = \left(\overrightarrow{O_f M} \wedge [X_M \vec{x} f + Z_M \vec{z} f] \right) \cdot \vec{y} f = [-R \vec{z} f \wedge X_M \vec{x} f] \cdot \vec{y} f = -RX_M$$

avec $X_M = fZ_M$ (limite du glissement)

$$\text{On a donc : (5) } 2C_{red} - RfZ_M = 0$$

$$\text{On avait précédemment trouvé : (1) } fZ_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t) \Leftrightarrow 2 \frac{C_{red}}{R} = M_S (\ddot{x}(t) - g \sin \alpha)$$

$$C_{red} = \frac{R}{2} M_S (\ddot{x}(t) - g \sin \alpha)$$

Application numérique dans le cas du glissement : $\ddot{x} = 4,15 m.s^{-2}$ donc $C_{red} \approx 160 Nm$

Q6 : « Chaque motoréducteur fournit 70 Nm au maximum » et on trouve qu'il faut un couple de 160 Nm pour que le fauteuil patine sur une pente de béton mouillé de 12%.

Les moteurs ne fournissant pas ce couple élevé, le fauteuil ne patinera pas.

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0 \quad \text{et} \quad (5) \quad 2C_{red} - RfZ_M = 0$$

$$\text{d'où : } Z_N = M_S g \cos \alpha - Z_M = M_S g \cos \alpha - \frac{2C_{red}}{Rf} = 1461 - 1778 \quad [N]$$

$$Z_N = -317 N$$

Ce qui est impossible : Z_N ne peut être que positif s'il y a contact entre la roue avant et le sol ou nul s'il n'y a pas contact avec le sol.

Donc, le fauteuil n'est pas en équilibre quand le couple moteur est de 160 Nm et quand il est à la limite du glissement sur une pente à 12% de béton mouillé : le fauteuil bascule.

D'où la nécessité de limiter le couple moteur pour empêcher le basculement.

Q7 : Avec la valeur de couple moteur fournie. On a le système d'équations suivant avec $C_{red} = 70 Nm$

$$(1) \quad X_M + M_S g \sin \alpha = M_S \ddot{x}(t)$$

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos \alpha = 0$$

$$(5) \quad 2C_{red} - RX_M = 0 \text{ ce qui donne } X_M = 350 N$$

$$\text{D'où } \ddot{x}(t) = \frac{2C_{red}}{RM_S} + g \sin \alpha \quad \text{Application numérique : } \ddot{x}(t) = 1,17 m.s^{-2}$$

Le fauteuil ne glissera pas sur une pente de béton mouillé de 12% puisque $C_m < 160 Nm$.

On cherche à présent Z_N pour vérifier qu'il y a contact entre la roue avant et le sol.

On a le système d'équations :

$$(2) \quad Z_N + Z_M = M_S g \cos \alpha$$

$$(3) \quad -eZ_N + lZ_M = hX_M$$

$$\text{Résolution : } l \times (2) - (3) \Leftrightarrow (e + l)Z_N = eM_S g \cos \alpha - hX_M \quad \text{avec} \quad (5) \quad X_M = \frac{2C_{red}}{R}$$

$$\text{On a donc : } Z_N = \frac{lM_S g \cos \alpha - h \frac{2C_{red}}{R}}{e + l} \quad \text{Application numérique : } Z_N = 137 N$$

Le fauteuil ne bascule pas puisque $Z_N > 0$, les roues avant sont en contact avec le sol.

On peut vérifier qu'on n'a pas glissement en M : $e \times (2) + (3) \Leftrightarrow (e + l)Z_M = eM_S g \cos \alpha + hX_M$

$$\text{Ce qui donne } Z_M = \frac{eM_S g \cos \alpha + h \frac{2C_{red}}{R}}{e + l} \quad \text{Application numérique : } Z_M = 1324 N$$

D'après la loi de Coulomb, on n'a pas glissement en M si : $|X_M| < f|Z_M|$

Le coefficient de frottement f des roues sur une rampe de béton mouillé de pente 12% est $f = 0,45$

On a bien : $350 < 0,45 \times 1324$.

Le fauteuil ne glisse pas sur une rampe de béton mouillé dont la pente est 12%.

Ce cas de figure étant le cas le plus défavorable, les moteurs mis en place sur le fauteuil permettent de respecter les normes d'accès aux bâtiments.

Remarque générale : les questions nécessitent une parfaite modélisation (Q1) puis une application dans un premier temps du PFD sur l'ensemble du véhicule (Q2) puis sur les roues arrière (Q4). Les 3 équations obtenues à la Q2 sont indispensables pour la suite du Pb...

Problème N°2 :

Q1 : On cherche P tel que $\vec{M}(P, sol \rightarrow pied) = \vec{0}$

Soit $P\vec{O}_S \wedge \int p \vec{z}_0 dy + \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy = \vec{0} \Leftrightarrow P\vec{O}_S \cdot \int p dy + \int O_S \vec{M} \wedge p dy = \vec{0}$ d'où $O_S \vec{P} = \frac{\int O_S \vec{M} \wedge p dy}{\int p dy}$ donc P existe et $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ est un glisseur.

Ou plus simplement : un glisseur a sa résultante non nulle $\vec{R}$ et orthogonale au moment $\forall P, \vec{R} \cdot \vec{M}(P) = 0$.

Autrement dit son automoment est nul. Or $\forall P, \vec{R}(P, sol \rightarrow pied) \cdot \vec{M}(P, sol \rightarrow pied) = F \vec{z}_0 \cdot \int P \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy = 0$ donc $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ est un glisseur.

Q2 : D'après 1 : $O_S \vec{H}_S = \frac{\int p y dy}{\int p dy} \vec{y}_0 > \vec{0}$ de même $C_S \vec{H}_S = \frac{\int C_S \vec{M} \wedge p dy}{\int p dy} = \frac{\int p y dy - \int p L dy}{\int p dy} \vec{y}_0 < \vec{0}$ donc $H_S \in [O_S, C_S]$

Q3 :

$$\{T_{sol \rightarrow pied}\} = \left\{ \begin{array}{l} b \int (p \vec{z}_0 + t \vec{y}_0) dy \\ b \int O_S \vec{M} \wedge (p \vec{z}_0 + t \vec{y}_0) dy \end{array} \right\} \text{ . Or } O_S \vec{M} // \vec{y}_0 \text{ donc}$$

$$\{T_{sol \rightarrow pied}\} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} b \int p \vec{z}_0 dy \\ b \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}}_{\text{glisseur en } H_s \text{ trouvé en 1}} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} b \int t \vec{y}_0 dy \\ \vec{0} \end{array} \right\}}_{\text{glisseur suivant } (O_S, \vec{y}_0)} \text{ est un glisseur en } H_s.$$

Q4 : expression du torseur dynamique en G : on néglige masse et inertie de 2 ($\overrightarrow{\delta_{G,2/0}}$ et $\overrightarrow{R_{d,2/0}}$ sont nuls) et 1 est en translation donc $\overrightarrow{\delta_{G,E/0}} = \overrightarrow{\delta_{G,1/0}} + \overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{R_{d,E/0}} = \overrightarrow{R_{d,1/0}} + \overrightarrow{R_{d,2/0}} = m_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{dY_G}{dt} \right) \vec{y}_0 + \vec{0}$

Théorème du moment dynamique en G : $\vec{M}(G, sol \rightarrow pied) \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}(G, pes \rightarrow l) \cdot \vec{x}_0 = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GH_S} \wedge \vec{R}_{sol \rightarrow pied} = \vec{0}$

$$D'où (-Y_G(t) \vec{y}_0 - Z_G(t) \vec{z}_0 + Y_{H_S} \vec{y}_0) \wedge (N_{sol \rightarrow pied} \vec{z}_0 + T_{sol \rightarrow pied} \vec{y}_0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (Y_{H_S} - Y_G(t)) N_{sol \rightarrow pied} + Z_G(t) T_{sol \rightarrow pied} = 0$$

Théorème de la résultante dynamique : $N_{sol \rightarrow pied} \vec{z}_0 + T_{sol \rightarrow pied} \vec{y}_0 - m_1 g \vec{z}_0 = m_1 \ddot{Y}_G(t) \vec{y}_0$

$$\Rightarrow T_{sol \rightarrow pied} = m_1 \ddot{Y}_G(t) \quad \text{et} \quad N_{sol \rightarrow pied} = m_1 g \quad \text{On retrouve l'équation } Y_{H_S}(t) = Y_G(t) - \frac{Z_G}{g} \ddot{Y}_G(t)$$

Q5 : Le cas limite est pour $y_{H_s} = L$

$$y_G = y_{H_s} + \frac{z_G}{g} \frac{d^2 y_G}{dt^2} = 0,3 + \frac{1,05}{9,81} \times 1,39 = 0,449 \text{ m}$$

Foulée = $4.y_G = 1,795 \text{ m} > 1,5 \text{ m}$ donc le CdCf n'est pas respecté.

Q6 : Condition d'adhérence $T_{sol \rightarrow 2} \leq \mu.N_{sol \rightarrow 2}$ soit avec Q4 : $\frac{d^2 y_G}{dt^2} \leq \mu.g = 0,981 \text{ m.s}^{-2} < 1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Le cahier des charges n'est pas satisfait.

Q7 : $\{T_{sol \rightarrow pied}\} + \{T_{cheville \rightarrow pied}\} = \{0\}$. Les termes du tableau sont des intensités

Action mécanique du sol sur le pied	cas n°1	cas n°2	cas n°3
	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{SP} \end{Bmatrix}_{O_P, B_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{SP} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_P, B_0}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{SP} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_P, B_0}$
Action mécanique de la cheville sur le pied dans la liaison A ₀	$\begin{Bmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_0, B_0}$	$\begin{Bmatrix} -X_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_0, B_0}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_0, B_0}$
Action mécanique de la cheville sur le pied dans la liaison A ₁	$\begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_1, B_1}$	$\begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_1, B_1}$	$\begin{Bmatrix} -X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_1, B_1}$
Action mécanique de la cheville sur le pied dans la liaison A ₂	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, B_2}$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, B_2}$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, B_2}$

Q8 : $\vec{M}(H_s, s \rightarrow p) = \vec{0} = \vec{M}(O_p, s \rightarrow p) + H_s \vec{P} \wedge \vec{R}(s \rightarrow p) = L_{SP} \vec{x}_0 + (h \vec{z}_0 - y_{ZMP} \vec{y}_0) \wedge (Y_{SP} \vec{y}_0 + Z_{SP} \vec{z}_0)$ donc

$$L_{SP} \vec{x}_0 - h Y_{SP} \vec{x}_0 - y_{ZMP} \cdot Z_{SP} \vec{x}_0 = \vec{0} \text{ soit } y_{ZMP} = \frac{L_{SP} - h Y_{SP}}{Z_{SP}} \cdot A.N. : y_{ZMP} = \frac{L_{SP} - h Y_{SP}}{Z_{SP}} = \frac{35 - 0,05 \times 300}{400} = 0,05 \text{ m}$$

comme $50 \text{ mm} < 300$ donc la condition de stabilité est respectée.

Q9 : On isole le pied et on écrit les équations du PFD : $\{T_{sol \rightarrow pied}\} + \{T_{cheville \rightarrow pied}\} = \{0\}$

$$\text{d'où : } \begin{cases} X_0 - \frac{X_1}{2} - \frac{X_2}{2} = 0 \\ Y_{SP} + \frac{\sqrt{3}}{2} X_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} X_2 = 0 \\ Z_{SP} + Z_0 + Z_1 + Z_2 = 0 \\ L_{SP} + r Z_0 - r \frac{Z_1}{2} - r \frac{Z_2}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} Z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} Z_2 = 0 \\ -r X_0 - r X_1 - r X_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -\frac{Y_{SP}}{\sqrt{3}} \\ X_2 = \frac{Y_{SP}}{\sqrt{3}} \\ Z_0 = -\frac{2L_{SP} + r Z_{SP}}{3r} \\ Z_1 = \frac{L_{SP} - r Z_{SP}}{3r} \\ Z_2 = \frac{L_{SP} - r Z_{SP}}{3r} \end{cases}$$

Pas de composante de liaison indéterminée. Il s'agit d'une liaison encastrement réalisée de manière **isostatique**

Q10 :

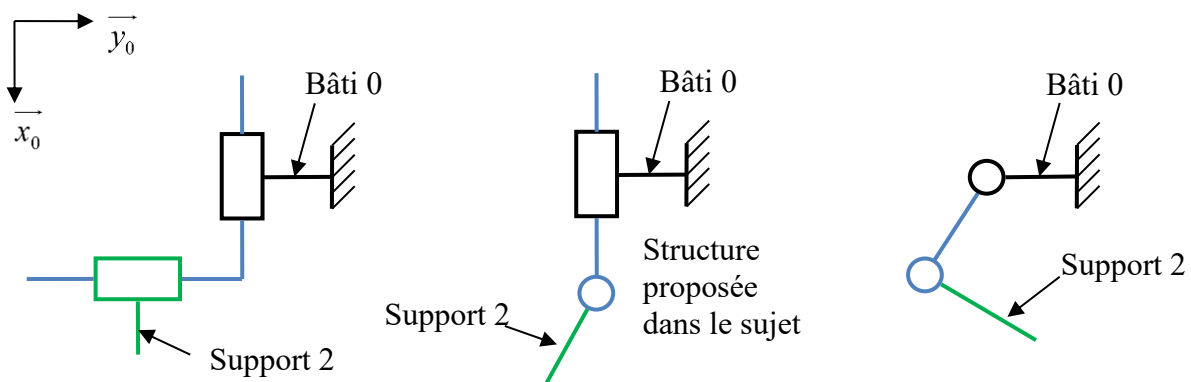
$$Z_0 \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -\frac{300}{\sqrt{3}} = -173 \text{ N} \\ X_2 = \frac{300}{\sqrt{3}} = 173 \text{ N} \\ Z_0 = -\frac{2 \times 35 + 0,04 \times 400}{3 \times 0,04} = -716 \text{ N} \\ Z_1 = Z_2 = \frac{35 - 0,04 \times 400}{3 \times 0,04} = 158 \text{ N} \end{cases}$$

est légèrement en dehors de l'intervalle de linéarité $[-680 \text{ N} ; 680 \text{ N}]$

Problème N°3 :

Q1 : Le bras motorisé doit pouvoir déplacer la pince dans des plans horizontaux $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ et effectuer une translation suivant une direction verticale $\vec{z}_0$.

Pour le déplacement dans un plan horizontal, on propose les trois structures suivantes :



Q2 :

Liaison	Bâti 0 / Coulisseau 1	Coulisseau 1 / Support 2	Support 2 / Ensemble 3
Modèle de liaison proposé	Glissière	Pivot	Glissière
Caractéristiques cinématiques	Direction $\vec{x}_0$	Axe $(G_2, \vec{z}_0)$	Direction $\vec{z}_0$
Forme torseur cinématique	$\begin{pmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\forall M, B_0}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{G_2, B_0}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & v_z \end{pmatrix}_{\forall M, B_0}$
Forme torseur d'action mécanique	$\begin{pmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{\forall M, B_0}$	$\begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{pmatrix}_{G_2, B_0}$	$\begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & N \end{pmatrix}_{\forall M, B_0}$

Q3 :

Effort	Ensemble isolé	Théorème utilisé	Justification choix d'isolement et de théorème
F_{M1}	1 + 2 + 3	Résultante dynamique suivant $\vec{x}_0$	La force recherchée F_{M1} est portée par $\vec{x}_0$ et la composante de la résultante transmissible par la liaison 1/0 est nulle suivant cette direction.
C_{M2}	2 + 3	Moment résultant dynamique suivant $\vec{z}_0$, en G_2 .	Le couple recherchée C_{M2} est portée par $\vec{z}_0$ et la composante du moment transmissible par la liaison 2/1 est nulle suivant cette direction en G_2 .
F_{M3}	3	Résultante dynamique suivant $\vec{z}_0$	La force recherchée F_{M3} est portée par $\vec{z}_0$ et la composante de la résultante transmissible par la liaison 3/2 est nulle suivant cette direction.

Q4 : $\bar{I}_{(G_3,3)} = \bar{I}_{(G_3,tige)} + \bar{I}_{(G_3,masse)}$ or $\bar{I}_{(G_3,tige)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{\lambda^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{\lambda^2}{12} \end{bmatrix}_{B_3}$ en utilisant l'annexe

$$\bar{I}_{(G_3,masse)} = \bar{I}_{(C_3,masse)} + m_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{4} \end{bmatrix}_{B_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_3} + m_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{4} \end{bmatrix}_{B_3} \quad (\text{huygens})$$

$$\text{D'où : } \bar{I}_{(G_3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{\lambda^2}{12} + m_p \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{\lambda^2}{12} + m_p \frac{\lambda^2}{4} \end{bmatrix}_{B_3}$$

Q5 : On isole l'ensemble 2+3 soumis à :

l'action de la pesanteur

$$\{\tau_{pes \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\tau_{pes \rightarrow 3}\}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

l'action des frottements visqueux

$$\{\tau_{fv \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -f_2 \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

l'action de 1 sur 2 :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_0 + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_0 + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z}_0 \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_0 + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

l'action de la motorisation M_2 :

$$\{\tau_{M_2 \rightarrow 2}\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{M_2} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Q6 : théorème du moment résultant dynamique suivant $\vec{z}_0$, en G_2 : $\overrightarrow{\delta_{(G_2,2+3/0)}} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{M_{G_2, \overrightarrow{2+3} \rightarrow 2+3}} \cdot \vec{z}_0$.

$$\overrightarrow{\sigma_{(G_2,2/0)}} \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \bar{I}_{(G_2,2)} (\overrightarrow{\Omega_{(2/0)}}) = J_2 \dot{\theta} \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{\delta_{(G_2,2/0)}} \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d(\overrightarrow{\sigma_{(G_2,2/0)}} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_0 - \overrightarrow{\sigma_{(G_2,2/0)}} \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_0 = J_2 \ddot{\theta}.$$

$$\overrightarrow{\sigma_{(G_3,3/0)}} \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \bar{I}_{(G_3,3)} (\overrightarrow{\Omega_{(3/0)}}) = J_3 \dot{\theta} \quad \text{ce qui donne} \quad \overrightarrow{\delta_{(G_3,3/0)}} \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d(\overrightarrow{\sigma_{(G_3,3/0)}} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_0 - \overrightarrow{\sigma_{(G_3,3/0)}} \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_0 = J_3 \ddot{\theta}.$$

$$\overrightarrow{V_{(G_3,3/0)}} = \left[\frac{d \overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(x(t) \vec{x}_0 - (d_1 + z(t)) \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \vec{x}_3)}{dt} \right]_0 = \dot{x} \vec{x}_0 - \dot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta} \vec{y}_3$$

$$\overrightarrow{a_{(G_3,3/0)}} = \left[\frac{d \overrightarrow{V_{(G_3,3/0)}}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(\dot{x} \vec{x}_0 - \dot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta} \vec{y}_3)}{dt} \right]_0 = \ddot{x} \vec{x}_0 - \ddot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \ddot{\theta} \vec{y}_3 - (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta}^2 \vec{x}_3$$

$$\overrightarrow{\delta_{(G_2,3/0)}} = \overrightarrow{\delta_{(G_3,3/0)}} + m_3 \overrightarrow{G_2 G_3} \wedge \overrightarrow{a_{(G_3,3/0)}} = J_3 \ddot{\theta} \vec{z}_0 + m_3 (-z \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \vec{x}_3) \wedge (\ddot{x} \vec{x}_0 - \ddot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \ddot{\theta} \vec{y}_3 - (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta}^2 \vec{x}_3)$$

$$\overrightarrow{\delta_{(G_2,3/0)}} \cdot \vec{z}_0 = J_3 \ddot{\theta} + \left(m_3 (\frac{\lambda}{2}) (\vec{x}_3 \wedge (\ddot{x} \vec{x}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \ddot{\theta} \vec{y}_3)) \cdot \vec{z}_0 \right) = \left[J_3 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (\frac{\lambda}{2}) \ddot{x} \sin \theta$$

$$\overrightarrow{M_{G_2, \overrightarrow{2+3} \rightarrow 2+3}} \cdot \vec{z}_0 = C_{M_2} - f_2 \dot{\theta}.$$

On en déduit donc $C_{M_2} - f_2 \dot{\theta} = \left[J_3 + J_2 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (\frac{\lambda}{2}) \ddot{x} \sin \theta$

$$C_{M_2} = \left[J_3 + J_2 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (\frac{\lambda}{2}) \ddot{x} \sin \theta + f_2 \dot{\theta} \quad (E_2).$$

Q7 : Par identification : $A = \left[J_3 + J_2 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right]$; $B = f_2$; $C = -m_3 (\frac{\lambda}{2}) \sin \theta$.

Q8 : Les mouvements des axes 1 et 2 sont couplés car les équations différentielles (E₁) et (E₂ : celle à trouver) comportent toutes les deux des termes en x, θ et leurs dérivées.