TD - Automates

Exercice 1. Donner un automate fini déterministe reconnaissant chacun des langages suivants sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. $L_1 = \{u \in \Sigma^*, |u| = 0 \mod 2\}$
2. $L_2 = \{u \in \Sigma^*, |u|_b \leq 1\}$
3. $L_3 = \{u \in \Sigma^*, |u|_b \geq 1\}$
4. $L_4 = \{u \in \Sigma^*, u$ ne contient jamais deux a consécutifs$\}$
5. $L_5 = \{u \in \Sigma^*, aba$ est un préfixe de $u\}$
6. $L_6 = \{u \in \Sigma^*, aba$ est un suffixe de $u\}$
7. $L_7 = \{u \in \Sigma^*, aba$ est un facteur de $u\}$
8. $L_8 = \{u \in \Sigma^*, aba$ est un sous-mot de $u\}$
9. $L_9 = \{u \in \Sigma^*,$ toute occurrence de b est suivie par une occurrence de $a\}$
10. $L_{10} = \{u \in \Sigma^*,$ les deux dernières lettres de u sont identiques$\}$

Exercice 2. Montrer que les langages suivants ne sont pas reconnaissables.

1. $L_1 = \{u \in \Sigma^*, |u|_a = |u|_b\}$
2. $L_2 = \{u \in \Sigma^*, |u|_a < |u|_b\}$
3. $L_3 = \{u \in \Sigma^*, u$ est un palindrome$\}$
4. $L_4 = \{a^p, p$ est premier$\}$

Exercice 3. Quelques propriétés...

1. Un sous-langage d'un langage reconnaissable est-il reconnaissable ?
2. L'union de deux langages non reconnaissables peut-elle être reconnaissable ?
3. Les mots d'une certaine longueur fixée d'un langage reconnaissable forment-ils un langage reconnaissable ?
4. L'ensemble des mots pour lesquels un automate fini fait un blocage est-il reconnaissable ?

Exercice 4. Soient $\mathscr{A}_1 et \mathscr{A}_2$ deux automates finis déterministes. Construire un automate reconnaissant la différence symétrique de $L(\mathscr{A}_1)$ et $L(\mathscr{A}_1)$ (c'est-à-dire, les mots appartenant à un des deux langages, mais n'appartenant pas aux deux à la fois).

Exercice 5. Montrer que si L est un langage reconnaissable, alors le langage "miroir" de L (les mots de L écrits à l'envers) est reconnaissable.

Exercice 6. Un exercice de langages qui ne parle pas d'automates... mais très classique ! Si L est un langage, on définit sa racine carrée $\sqrt{L}$ de la manière suivante :

$$\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^*, u.u \in L\}$$

1. Comparer L et $\sqrt{L^2}$. Sont-ils inclus l'un dans l'autre, identiques ?
2. Même question avec L et $(\sqrt{L})^2$.