INTERRO DE COURS : MODELISATION DES CARACTERISTIQUES D'INERTIE DES SOLIDES

Question 1 – *Donner l'expression mathématique (avec l'intégrale) du centre d'inertie d'un solide.*

$$\iiint_E \overrightarrow{GM}dm = \vec{0} \quad ou \quad m\overrightarrow{OG} = \iiint_E \overrightarrow{OM}dm$$

Question 2 – *Donner l'expression mathématique du centre d'inertie d'un ensemble de solides en fonction du centre d'inertie des différents solides composant cet ensemble.*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum m_i}$$

Question 3 – *Donner l'expression mathématique (avec l'intégrale) des composantes de la matrice d'inertie d'un solide.*

$$I(O,E) = \begin{pmatrix} I_{Ox} & -P_{xOy} & -P_{xOz} \\ -P_{xOy} & I_{Oy} & -P_{yOz} \\ -P_{xOz} & -P_{yOz} & I_{Oz} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

I_{Ox}, I_{Oy} et I_{Oz} sont les moments d'inertie respectivement par rapport aux axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$;
P_{xOy}, P_{xOz} et P_{yOz} sont les produits d'inertie respectivement par rapport aux plans xOy, xOz et yOz.

$$I_{Ox} = \iiint_E (y^2+z^2)dm \qquad I_{Oy} = \iiint_E (x^2+z^2)dm \qquad I_{Oz} = \iiint_E (x^2+y^2)dm$$

$$P_{xOy} = \iiint_E xydm \qquad P_{xOz} = \iiint_E xzdm \qquad P_{yOz} = \iiint_E yzdm$$

Question 4 – *Donner la forme de la matrice d'inertie d'un solide en fonction des symétries matérielles du solide.*

Si le plan xOy est plan de symétrie matérielle, alors les deux produits d'inertie P_{xOz} et P_{yOz} sont nuls.
Si deux plans parmi les trois plans xOy, xOz et yOz sont des plans de symétrie matérielle, alors les trois produits d'inertie sont nuls.
si $(O,\vec{z})$ est un axe de révolution matérielle, alors I_{Ox} et I_{Oy} sont égaux et les trois produits d'inertie sont nuls :

$$I(O,E) = \begin{pmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ox} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Question 5 – *Présenter le théorème de Huygens.*

$$I(M,E) = I(G,E) + I\left(\overrightarrow{MG}\right) \ avec \ I\left(\overrightarrow{MG}\right) = \begin{pmatrix} m(y_G^2+z_G^2) & -mx_Gy_G & -mx_Gz_G \\ -mx_Gy_G & m(x_G^2+z_G^2) & -my_Gz_G \\ -mx_Gz_G & -my_Gz_G & m(x_G^2+y_G^2) \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

où x_G, y_G et z_G sont les coordonnées de $\overrightarrow{MG}$ dans $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Interro de cours : Modelisation du Comportement Dynamique des Systemes

Question 1 – *Donner l'expression simplifiée de la résultante dynamique ou cinétique d'un solide.*

$$\vec{p}(S/R) = m\vec{V}(G,S/R) \qquad \vec{A}(S/R) = m\vec{\Gamma}(G,S/R)$$

Question 2 – *Donner les 2 équations vectorielles du PFD pour un solide en translation par rapport au repère galiléen.*

Théorème des résultantes dynamiques : $m\vec{\Gamma}(G,S/R) = \vec{R}(ext \rightarrow S)$

Théorème des moments dynamiques : $\vec{0} = \vec{M}(G, ext \rightarrow S)$

Question 3 – *Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport au repère galiléen, donner l'équation du théorème du moment en un point de cet axe et en projection sur cet axe.*

Théorème des moments dynamiques : $I_{Ox}\ddot{\theta} = \vec{M}(O, ext \rightarrow S) \cdot \vec{x}$

Question 4 – *Pour un point quelconque d'un solide, donner la relation entre le moment cinétique et la matrice d'inertie. Faire de même pour le centre de gravité et un point fixe du repère galiléen.*

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R) + m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R) \text{ si } A \text{ quelconque.}$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R) \text{ si } A \text{ fixe dans le repère galiléen.}$$

$$\vec{\sigma}(G,S/R) = I(G,S)\vec{\Omega}(S/R).$$

Question 5 – *Pour un point quelconque d'un solide, donner la relation entre le moment dynamique et le moment cinétique. Faire de même pour le centre de gravité et un point fixe du repère galiléen.*

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right]_R + \vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G,S/R) \text{ si } A \text{ quelconque.}$$

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right]_R \text{ si } A \text{ fixe dans le repère galiléen.}$$

$$\vec{\delta}(G,S/R) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R)}{dt}\right]_R.$$

Question 6 – *Donner la relation de changement de point du moment dynamique.*

$$\vec{\delta}(B,S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{\Gamma}(G,S/R)$$

INTERRO DE COURS : MODELISATION DU COMPORTEMENT ENERGETIQUE DES SYSTEMES

Question 1 – *Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide à partir de 2 torseurs.*

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}\{C(E/R)\}\otimes\{\upsilon(S/R)\} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} m\vec{V}(G,S/R) \\ \vec{\sigma}(A,S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Question 2 – *Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en translation par rapport au repère galiléen.*

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}mV^2$$

Question 3 – *Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe par rapport au repère galiléen.*

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}I_{ox}\omega^2$$

Question 4 – *Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un ensemble de solide.*

L'énergie cinétique d'un système (ensemble de solides) est la somme des énergies cinétiques de chacun des solides.

Question 5 – *Donner l'expression de la puissance d'une action mécanique à partir de 2 torseurs, que signifie le signe de cette puissance ?*

$$P(2 \rightarrow 1/R) = \{T(2 \rightarrow 1)\}\otimes\{\nu(1/R)\}$$

Question 6 – *Donner l'expression de la puissance des efforts intérieurs d'une liaison à partir de 2 torseurs.*

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \{T(2 \rightarrow 1)\}\otimes\{\nu(1/2)\} = \{T(1 \rightarrow 2)\}\otimes\{\nu(2/1)\}$$

Question 7 – *Ecrire le théorème de l'énergie-puissance pour un ensemble de solides.*

$$\frac{dE_C(E/R)}{dt} = P(ext \rightarrow E,R) + \sum_{i\neq j} P\left(S_i \leftrightarrow S_j\right)$$