

## Problème 6 : Découpe de tissus (extrait CCP MP 2018)

Q1 : Si on raisonne en norme :

Valeur maximale : 162.5N

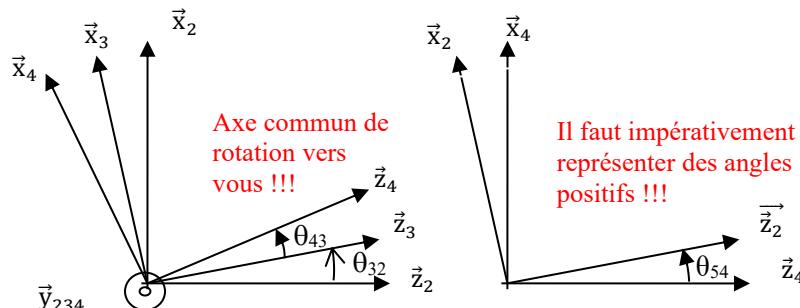
Valeur minimale : 140N

Valeur moyenne : 150 N

$$\frac{\max - \min}{\text{moy}} = \frac{162.5 - 140}{150} = 15\%$$

L'effort de coupe varie donc de  $\pm 7.5\% < \pm 10\%$  par rapport à la valeur moyenne, l'exigence 1.2.1.1 est respectée

Q2 :



Figures de changement de bases

Q3 : Fermeture angulaire :  $(\vec{x}_2, \vec{x}_2) = 0 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) + (\vec{x}_3, \vec{x}_4) + (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = \theta_{32}(t) + \theta_{43}(t) + \theta_{54}(t) = 0$

On réalise une fermeture géométrique entre les points A, B et C :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$   
 $\Rightarrow L_3 \vec{z}_3 + L_4 \vec{z}_4 - \lambda \vec{z}_2 = \vec{0}$

En projection sur  $\vec{x}_2$  :

$$L_3 \sin \theta_{32} + L_4 \sin(\theta_{43} + \theta_{32}) = 0 \Rightarrow L_3 \sin \theta_{32} = L_4 \sin \theta_{54} \text{ d'où } \sin \theta_{54} = \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32}$$

$$\sin^2 \theta_{54} = \left( \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2 \quad \cos^2 \theta_{54} = 1 - \left( \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2$$

$$\cos \theta_{54} = \pm \sqrt{1 - \left( \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2} \quad (\text{avec } L_3 < L_4)$$

En projection sur  $\vec{z}_2$  :

$$L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos(\theta_{43} + \theta_{32}) - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \cos \theta_{54}$$

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left( \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2} \quad \text{ou} \quad \lambda = L_3 \cos \theta_{32} - L_4 \sqrt{1 - \left( \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2}$$

D'après le schéma cinématique et le paramétrage  $\lambda$  doit être positif, on en déduit :

$$\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4 \sqrt{1 - \left( \frac{L_3}{L_4} \sin \theta_{32} \right)^2}$$

Q4 :  $\Delta z = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = L_3 + L_4 - (-L_3 + L_4) = 2L_3$

(Ce que l'on peut trouver directement par lecture du schéma cinématique)

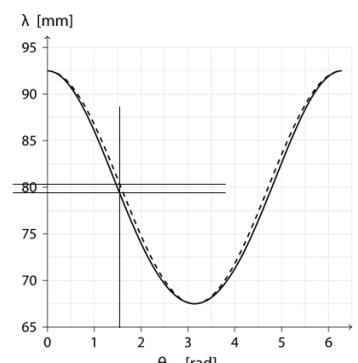
Application numérique :  $\Delta z = 2.12,5 = 25 \text{ mm} > 20 \text{ mm}$

L'exigence 1.2.2.3 est respectée

Q5 : Numériquement le rapport  $\left( \frac{L_4}{L_3} \right)^2 = \left( \frac{80}{12.5} \right)^2 = 40,9 \gg 1$ .

L'expression de la question 4 peut donc s'écrire :  $\lambda = L_3 \cos \theta_{32} + L_4$

Q6 : Les valeurs maximales et minimales sont identiques pour la position théorique et pour la position approximée. L'écart maximal vaut environ 1/25 soit 4 %. On peut donc valider l'approximation pour la position



Q7 : On a directement :  $\dot{\lambda}(t) = -\dot{\theta}_{32}L_3 \sin \theta_{32} = -\omega_{32}L_3 \sin \theta_{32}$

Q8 : La valeur maximale théorique est de 4m/s.

La valeur maximale du système simplifié est de 3.9m/s.

L'exigence 1.2.2.4 impose  $4\text{m/s} \pm 5\%$  soit  $3.8\text{m/s} < \dot{\lambda} < 4.2\text{m/s}$

L'exigence 1.2.2.4 est donc respectée avec le modèle simplifié.

Q9 :  $I(A, 3) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & J_3 & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}$  du fait de la symétrie / plan ( $A, \vec{x}_3, \vec{z}_3$ )

Q10 :

Q11 et 12 :

hypothèse Pb plan. Les torseurs des liaisons pivots sont de la

$$\text{forme } T = \begin{Bmatrix} X & - \\ - & 0 \\ Z & - \end{Bmatrix}$$

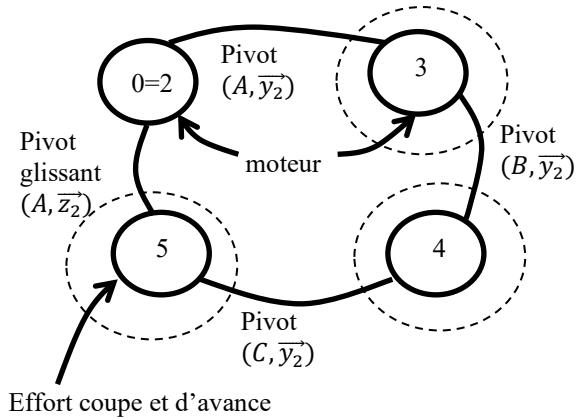
- TMD en A à 3 en projection  $\vec{y}_2$  :

$$\begin{aligned} C_m + (\vec{AB} \wedge \vec{R}_{4 \rightarrow 3}) \cdot \vec{y}_2 &= C_m + L_3 X_{43} \cos \theta_{43} + L_3 Z_{43} \sin \theta_{43} \\ &= J_3 \ddot{\theta}_{32} = 0 \end{aligned}$$

avec  $T_{4 \rightarrow 3} = \begin{Bmatrix} X_{43} & - \\ - & 0 \\ Z_{43} & - \end{Bmatrix}_{B, B_4}$ . On choisit de modéliser l'action

de 4 sur 3 en B dans la base 4 pour exprimer

le plus simplement possible les conséquences du PFD sur 4.



Effort coupe et d'avance  
En pointillé, les différentes frontières d'isolement pour la question facultative

- TMD en C à 4 en projection  $\vec{y}_2$  :  $(\vec{CB} \wedge (-\vec{R}_{4 \rightarrow 3})) \cdot \vec{y}_2 = 0$  car masse et inertie négligées pour 4.

D'où :  $X_{43} = 0$  (Pb quasi statique avec solide soumis à 2 glisseurs de direction (BC))

- TRD à 5 en projection  $\vec{z}_2$  :  $F_c - Z_{43} \cos \theta_{54} = M_5 \ddot{\lambda} = -M_5 \dot{\theta}_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}$

Reste à utiliser les relations géométriques (Q2 et Q3) pour terminer la résolution et retrouver l'équation proposée.

Autre Solution pour obtenir l'expression du Coule moteur ( celle demandée dans le sujet d'origine) : par l'application du TEC

$T_{4/R_0} = 0$  (Masse et inertie du solide 4 négligées)

$T_{5/R_0} = \frac{1}{2} \{C_{5/R_0}\} \otimes \{V_{5/R_0}\} = \frac{1}{2} M_5 (\vec{V}_{(C \in 5/0)})^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{(C, 5/0)} \cdot \vec{\Omega}_{5/0} = \frac{1}{2} M_5 (\dot{\lambda}^2 + V_a^2)$  (5 à un mouvement de translation rectiligne par rapport à 2 qui translate par rapport à 0.  $\vec{\Omega}_{5/0} = \vec{\Omega}_{5/2} + \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0}$ )

$T_{3/R_0} = \frac{1}{2} \{C_{3/R_0}\} \otimes \{V_{3/R_0}\} = \frac{1}{2} M_3 (\vec{V}_{(A \in 3/0)})^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_{(A, 3/0)} \cdot \vec{\Omega}_{3/0} = \frac{1}{2} J_3 \omega_{32}^2 + \frac{1}{2} M_3 V_a^2$  (3 a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe ( $A, \vec{y}_2$ ) par rapport à 2 qui translate par rapport à 0. Le point A est cdg de 3)

$T_{1+2/R_0} = \frac{1}{2} M_{12} V_a^2$  (mouvement de translation rectiligne )

L'énergie de l'ensemble est la somme des énergies cinétiques

$$T_{S/R_0} = T_{3/R_0} + T_{4/R_0} + T_{5/R_0} + T_{1+2/R_0} = \frac{1}{2} (M_3 + M_{12}) V_a^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_{32}^2 + \frac{1}{2} M_5 (V_a^2 + \dot{\lambda}^2)$$

$$T_{S/R_0} = \frac{1}{2} (M_3 + M_5 + M_{12}) V_a^2 + \frac{1}{2} (J_3 + M_5 (L_3 \sin \theta_{32})^2) \omega_{32}^2 = \frac{1}{2} M_{eq} V_a^2 + \frac{1}{2} J_{eq} (\theta_{32}) \omega_{32}^2$$

Avec  $J_{eq} = J_3 + M_5 (L_3 \sin \theta_{32})^2$  (attention  $J_{eq}$  n'est pas une constante) et  $M_{eq} = (M_3 + M_5 + M_{12})$

$J_{eq}$  est l'inertie équivalente vue par le moteur qui crée le mouvement de coupe de la lame. C'est la difficulté qu'à ce moteur à accélérer ou freiner l'ensemble cinématique 3, 4 et 5.

$M_{eq}$  est la masse équivalente vue par le moteur qui anime la translation du bras et de la tête de découpe. C'est la difficulté qu'à ce moteur à accélérer ou freiner l'ensemble cinématique 1, 2, 3, 4 et 5.

Le repère  $\mathcal{R}_2$  est galiléen.

Puissances intérieures : Les liaisons sont supposées parfaites :  $P_{int}(S) = P_{3 \leftrightarrow 4} + P_{4 \leftrightarrow 5} = 0$

### Puissances extérieures

Liaisons avec le bâti supposées parfaites :  $P_{0 \rightarrow S/R_2} = 0$

$$P_{moteur \rightarrow 3/R_2} = C_m \omega_{32}$$

$P_{pesanteur \rightarrow S/R_2} = 0$  (action de la pesanteur négligée)

$$P_{matelas \rightarrow lame/R_2} = \{T_{matelas \rightarrow lame}\} \otimes \{V_{lame/R_2}\} = \underset{c}{\left\{ \begin{array}{l} F_a \cdot \vec{y}_0 + F_c \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \otimes \underset{c}{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \dot{\lambda}(t) \vec{z}_0 \end{array} \right\}} = \dot{\lambda}(t) F_c$$

On en déduit :  $P_{ext \rightarrow S/R_2} = C_m \omega_{32} + \dot{\lambda}(t) F_c = C_m \omega_{32} - \omega_{32} L_3 \sin \theta_{32} F_c$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à S s'écrit :  $\frac{dE_c(S/R_2)}{dt} = P_{int}(S) + P_{ext \rightarrow S/R_2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} J_3 \omega_{32}^2 + \frac{1}{2} M_5 (\dot{\lambda}^2) \right] = C_m \omega_{32} + \dot{\lambda}(t) F_c \quad \Rightarrow \quad J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} = C_m \omega_{32} + \dot{\lambda}(t) F_c$$

ce qui donne :  $C_m = \frac{J_3 \dot{\omega}_{32} \omega_{32} + M_5 \ddot{\lambda} \dot{\lambda} - \dot{\lambda} F_c}{\omega_{32}}$

avec  $\dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}$  et  $\ddot{\lambda}(t) = -\dot{\omega}_{32} L_3 \sin \theta_{32} - \omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}$

En régime permanent :  $\dot{\theta}_{32} = cte$ , et  $\dot{\omega}_{32} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}(t) = -\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}$  et  $\ddot{\lambda}(t) = -\omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}$

$$C_m = \frac{M_5 (-\omega_{32} L_3 \sin \theta_{32}) (-\omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}) + \omega_{32} L_3 \sin \theta_{32} F_c}{\omega_{32}}$$

$$C_m = M_5 (-L_3 \sin \theta_{32}) (-\omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32}) + L_3 \sin \theta_{32} F_c$$

$$C_m = (M_5 \omega_{32}^2 L_3 \cos \theta_{32} + F_c) L_3 \sin \theta_{32}$$

Q13 : Le coulissoeau a un mouvement de va et vient donc même en régime permanent (vitesse de rotation constante du moteur) l'accélération du coulissoeau n'est pas constante et l'effort de coupe n'est pas constant. Comme avec une scie, on coupe la matière dans un sens de translation (descente de la lame pour plaquer le matelas sur la table) et on ne coupe pas la matière dans l'autre sens (remontée de la lame). Les dents de la lame sont orientées pour permettre cela.

De plus la pesanteur sur le coulissoeau est motrice durant la phase de descente et résistante durant la phase de montée. Ces phénomènes sont à l'origine du couple moteur variable en régime permanent et vont provoquer des vibrations.

Q14 : Difficile de mesurer directement l'effort de coupe à l'interface outil/matière. La courbe donnée figure 3 correspond très certainement à une mesure déduite de celle du couple moteur. Dans un moteur à courant continu, le couple est proportionnel (constante de couple souvent notée  $K_c$ ) à l'intensité du courant induit dans le rotor mesurable aux bornes du moteur. Du résultat  $C_m = [F_c + M_5 L_3 \dot{\theta}_{32}^2 \cos \theta_{32}] L_3 \sin \theta_{32}$ , on en déduit que la courbe figure 3 donne en fait l'évolution de  $F_c$  combinée aux effets d'inertie. Les frottements négligés dans l'étude justifient sans doute une moyenne non nulle sur la courbe.

$$Q15 : \vec{V}(G_3 \in 3/2) = \vec{V}(A \in 3/2) + \overrightarrow{G_3 A} \wedge \vec{\Omega}(3/2) = -a_3 \vec{z}_3 \wedge \omega_{32} \vec{y}_3$$

$$\vec{V}(G_3 \in 3/2) = a_3 \omega_{32} \vec{x}_3 \quad \vec{V}(G_5 \in 5/2) = \dot{\lambda} \vec{z}_2$$

Q16 : La résultante dynamique de l'ensemble est la somme des résultantes dynamiques :

$$\vec{R}_d(S/0) = \vec{R}_d(3/0) + \vec{R}_d(4/0) + \vec{R}_d(5/0)$$

$$\vec{R}_d(4/0) = \vec{0} \text{ (masse et inertie de 4 négligée)}$$

$$\vec{R}_d(5/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2$$

$$\vec{R}_d(3/0) = M_3 \vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = M_3 \left( a_3 \dot{\omega}_{32} \vec{x}_3 + a_3 \omega_{32} \left[ \frac{d\vec{x}_3}{dt} \right]_0 \right) = -M_3 a_3 \omega_{32}^2 \vec{z}_3$$

$$\vec{R}_d(S/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2 - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \vec{z}_3$$

$$\vec{R}_d(S/0) = M_5 \ddot{\lambda} \vec{z}_2 - M_3 a_3 \omega_{32}^2 (\cos \theta_{32} \vec{z}_2 + \sin \theta_{32} \vec{x}_2)$$

Q17 :  $\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2 = -M_3 a_3 \omega_{32}^2 \sin \theta_{32}$  la valeur maximale est donnée pour  $\sin \theta_{32} = -1$

$$(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{max} = M_3 a_3 \omega_{32}^2 \quad (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{max} = M_3 a_3 \omega_{32}^2$$

$$\underline{\text{Application numérique}} : (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{x}_2)_{max} = 0,35 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{3000 \cdot 2,3,14}{60} \right)^2 = 17N$$

$$\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2 = M_5 \ddot{\lambda} - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} = -M_5 L_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32} - M_3 a_3 \omega_{32}^2 \cos \theta_{32}$$

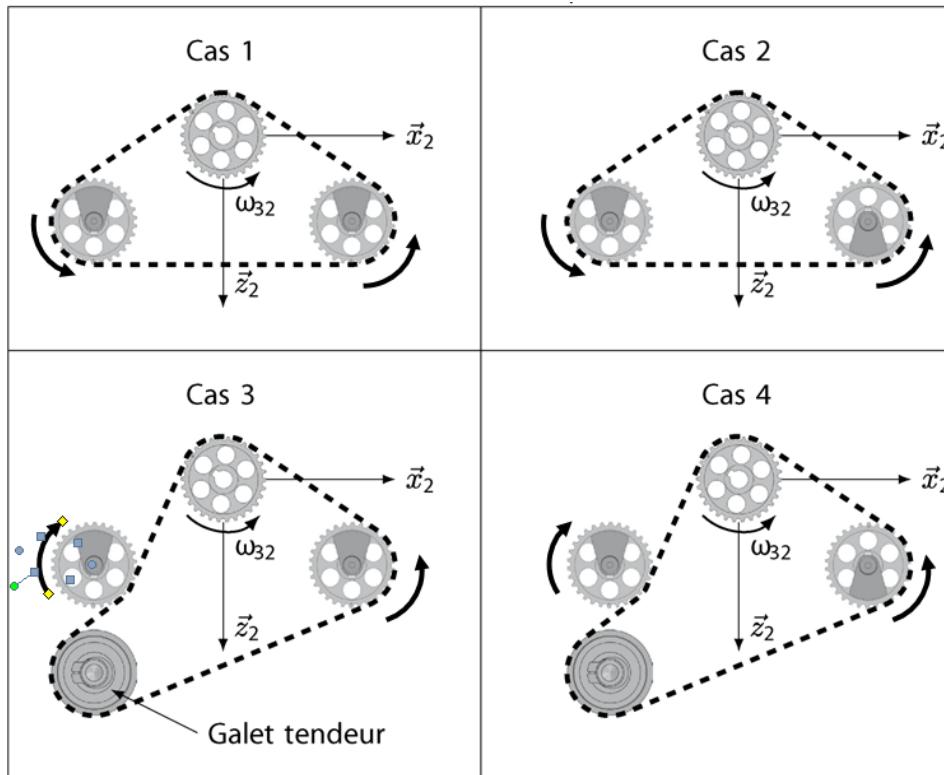
la valeur maximale est donnée pour  $\cos \theta_{32} = -1$

$$(\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{max} = (M_5 L_3 + M_3 a_3) \omega_{32}^2$$

$$\underline{\text{Application numérique}} : (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{max} = (0,1 \cdot 0,0125 + 0,35 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}) \cdot \left( \frac{3000 \cdot 2,3,14}{60} \right)^2 = 140N$$

Q18 : L'origine des vibrations est la pièce 5

Q19 :



Q20 : Pour supprimer les vibrations verticales il faut que les 2 masselottes soient en position haute ou basse en même temps.

Les cas 1 et 3 permettent de supprimer les vibrations verticales

Les cas 2 et 4 ne permettent pas de supprimer les vibrations verticales

Q21 : D'après la question précédente il faut choisir entre le cas 1 et le cas 3 pour supprimer les vibrations verticales. Dans le cas 1 les masselottes sont du même côté (suivant  $\vec{x}_0$ ) en même temps ce qui va provoquer des vibrations horizontales. Seul le cas 3 permet de limiter les vibrations horizontales et verticales

Q22 : On pose  $\vec{OG_i} = r \vec{z}_g$

$$\vec{V}(G_i \in \text{roue}/0) = r \dot{\theta}_i \vec{x}_i \quad \text{et } \vec{\Gamma}(G_i \in \text{roue}/0) = -r \dot{\theta}_i^2 \vec{z}_i \quad (\text{rappel } \ddot{\theta}_i = 0)$$

On en déduit pour la masse g :  $\vec{R}_d(m_g/0) = -m r \dot{\theta}_g^2 \vec{z}_g = -mr \dot{\theta}_g^2 (\cos \theta_g \vec{z}_2 + \sin \theta_g \vec{x}_2)$

On en déduit pour la masse d :  $\vec{R}_d(m_d/0) = -mr \dot{\theta}_d^2 \vec{z}_d = -mr \dot{\theta}_d^2 (\cos \theta_d \vec{z}_2 + \sin \theta_d \vec{x}_2)$

$$\begin{aligned} \text{Sur } \vec{x}_2 : \vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{x}_2 &= -mr \dot{\theta}_g^2 \sin \theta_g - mr \dot{\theta}_d^2 \sin \theta_d \\ \text{Sur } \vec{z}_2 : \vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{z}_2 &= -mr \dot{\theta}_g^2 \cos \theta_g - mr \dot{\theta}_d^2 \cos \theta_d \end{aligned}$$

Q23 : Pour ne pas générer de vibration suivant  $\vec{x}_2$ , on doit avoir

$$\vec{R}_d(m_d + m_g/0) \cdot \vec{x}_2 = -mr \dot{\theta}_g^2 \sin \theta_g - mr \dot{\theta}_d^2 \sin \theta_d = 0 \Rightarrow \sin \theta_g + \sin \theta_d = 0$$

Mais on doit aussi avoir :  $\cos \theta_g = \cos \theta_d$  sinon les masses ne servent à rien.

$$\text{On en déduit : } \theta_g = -\theta_d$$

Q24 : Sur  $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$ , d'après la question précédente quelle que soit la valeur de m, à condition de choisir correctement les angles  $\theta_d$  et  $\theta_g$ . La résultante dynamique est nulle

Exigence 1.2.2.2: « La résultante dynamique de l'ensemble de la tête de coupe doit être au maximum de 40N sur l'axe  $\vec{z}_0$  »

Pour annuler cette composante de résultante dynamique :

$$-mr \dot{\theta}_g^2 \cos \theta_g - mr \dot{\theta}_d^2 \cos \theta_d + 140 = 0 \text{ (rappel } (\vec{R}_d(S/0) \cdot \vec{z}_2)_{max} = 140N \text{ (Q17)}$$

$$2mr \dot{\theta}_g^2 \cos \theta_g = 140 \Rightarrow m = \frac{140}{2r \dot{\theta}_g^2}$$

$$\text{Application numérique : } m = \frac{140}{2.0.008 \left( \frac{3000.2.3.14}{60} \right)^2} = 0.089 \text{ kg} = 89g$$

Q25 : Si on double la vitesse de rotation du moteur l'effort de coupe devrait être multiplié par 4 (la vitesse de rotation du moteur  $\omega_{32}$  apparaît au carré dans l'expression  $C_m = [F_c + M_5 L_3 \dot{\theta}_{32}^2 \cos \theta_{32}] L_3 \sin \theta_{32}$ )

Q26 : D'après la figure 8 de l'énoncé l'effort de coupe moyen en norme pour le système amélioré est de 80 N alors que la vitesse de rotation est de 6000 tr/min.

Les masselottes d'équilibrage permettent donc de presque diviser par 8 l'effort de coupe sur la version améliorée par rapport à la version initiale.

On a confirmation que les courbes d'évolutions figures 3 et 9 correspondent au couple moteur et non à Fc. C'est bien sûr ce qui est pertinent pour le constructeur puisque l'amélioration envisagée permet de diminuer le couple à fournir donc le courant, donc la puissance électrique absorbée.

Q27 : Pour un moteur à courant continu, la puissance absorbée est  $P = U I$ .

La vitesse est double entre les 2 essais donc la tension aussi (modèle 1<sup>er</sup> ordre en régime permanent pour le moteur). Si on suppose que l'effort de coupe donc le couple, donc l'intensité sont multipliés par 4 (Q25) lorsque la vitesse est doublée. Sans changer la tête de coupe on devrait avoir une puissance élec absorbée :

$P = 2.U_1.4.I_1 = 8U_1.I_1$  ( $U_1, I_1$ , tension et intensité version initiale) alors qu'avec le changement de tête de coupe, on a  $P = 2.U_1.I_1/2 = U_1.I_1$  en estimant que l'effort de coupe a été divisé par 2 (150N → 80N).

Gain de  $(8-1)/8 = 87\%$