

# DS N°2

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Durée 4 heures

Le devoir comporte 3 problèmes extraits de sujet de concours

**Problème N°1** : extrait Centrale MP 2023 – temps conseillé

**Problème N°2** : court extrait Mines MP 2024 – L'inverseur de poussée eTras

**Problème N°3 (Bonus)** : court extrait E3a PSI 2014 - Le téléphérique de la Vanoise

## Problème N°1 : Exosquelette lombaire

### I.Introduction

#### I.A.Présentation générale

Les exosquelettes sont des solutions biomécaniques destinées à apporter une assistance ou un soutien physique à ceux qui les utilisent. La figure 1 représente l'exosquelette lombaire conçu par la société Japet. Il se présente sous la forme de deux ceintures (basse et haute) reliées par quatre actionneurs linéaires qui accompagnent les mouvements du patient tout en permettant un soutien de la colonne vertébrale.

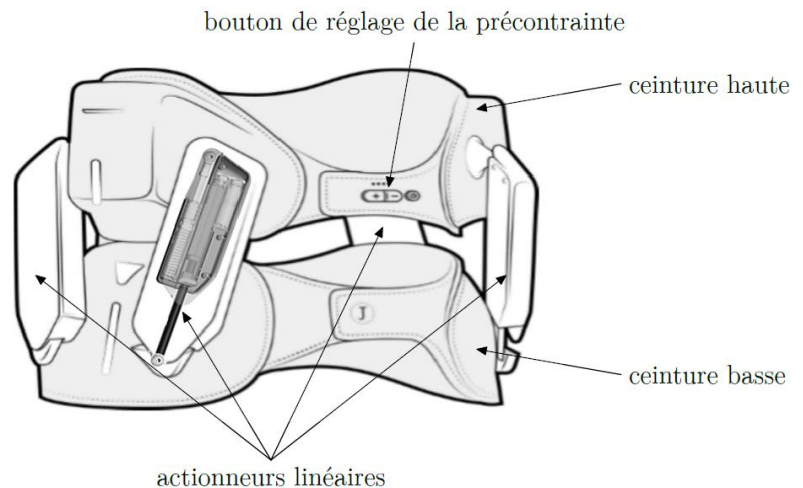


Figure 1 Exosquelette lombaire Japet

Cet exosquelette lombaire est en priorité destiné au marché du travail et a vocation à soulager les salariés qui l'utilisent dans leurs mouvements quotidiens, en particulier dans les domaines de l'industrie ou de la logistique. Il est également destiné au soin de patients souffrant de lombalgie, en hôpital ou à domicile. Cet exosquelette n'a pas pour but d'augmenter les capacités physiques de l'être humain mais de les maintenir à un niveau satisfaisant. Cette assistance permet ainsi de conserver une activité professionnelle normale.

Grâce à l'effort de traction créé par les quatre actionneurs linéaires, le dispositif diminue la pression sur la colonne vertébrale afin de limiter la compression lombaire et soulager l'utilisateur des douleurs. Le système suit les mouvements de l'utilisateur en temps réel afin de conserver une liberté de mouvement totale et de préserver l'activité musculaire.

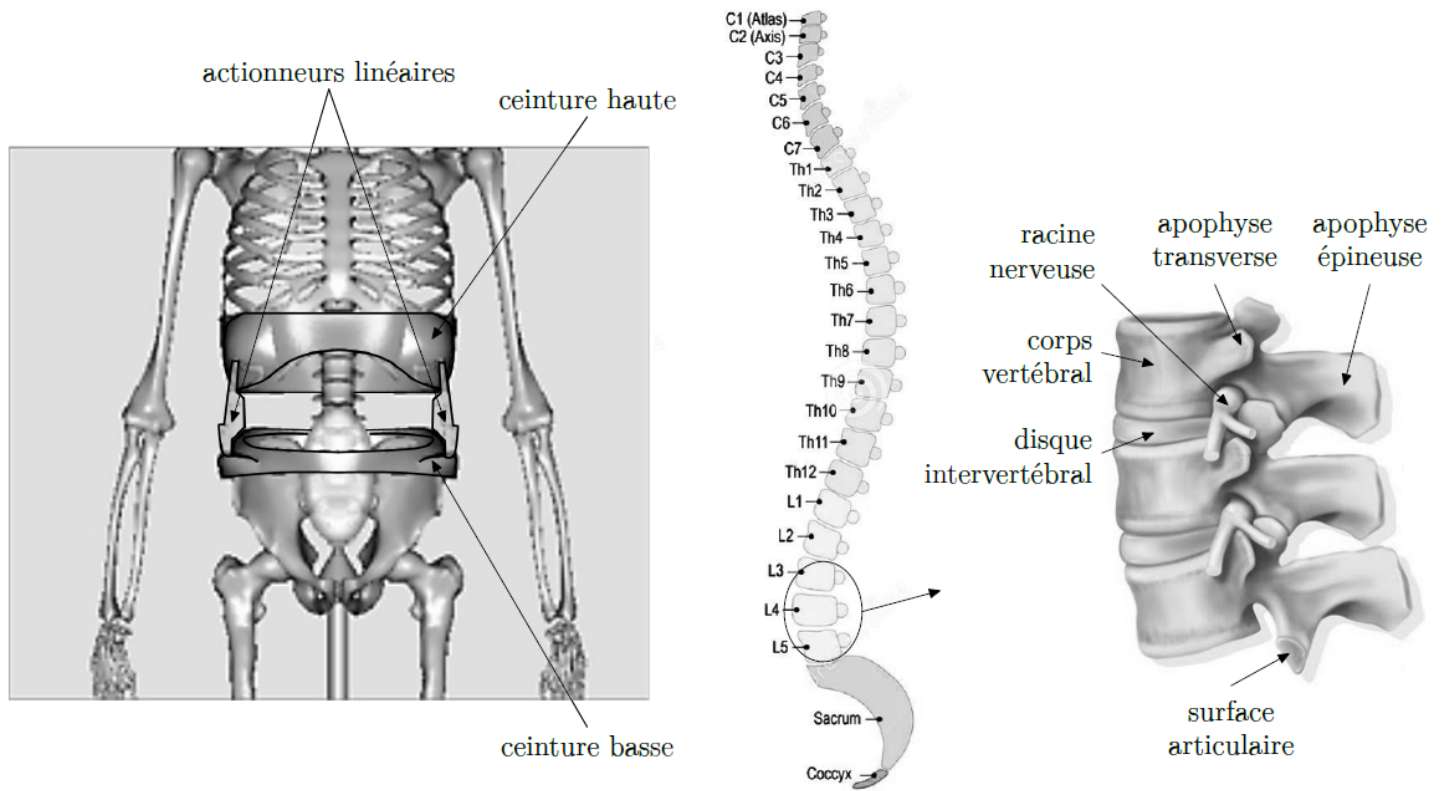
#### I.B.Pré-dimensionnement des quatre actionneurs

**Objectif** : Quantifier la force de traction à exercer par chaque actionneur linéaire pour atteindre un seuil de diminution de la pression intra-discale.

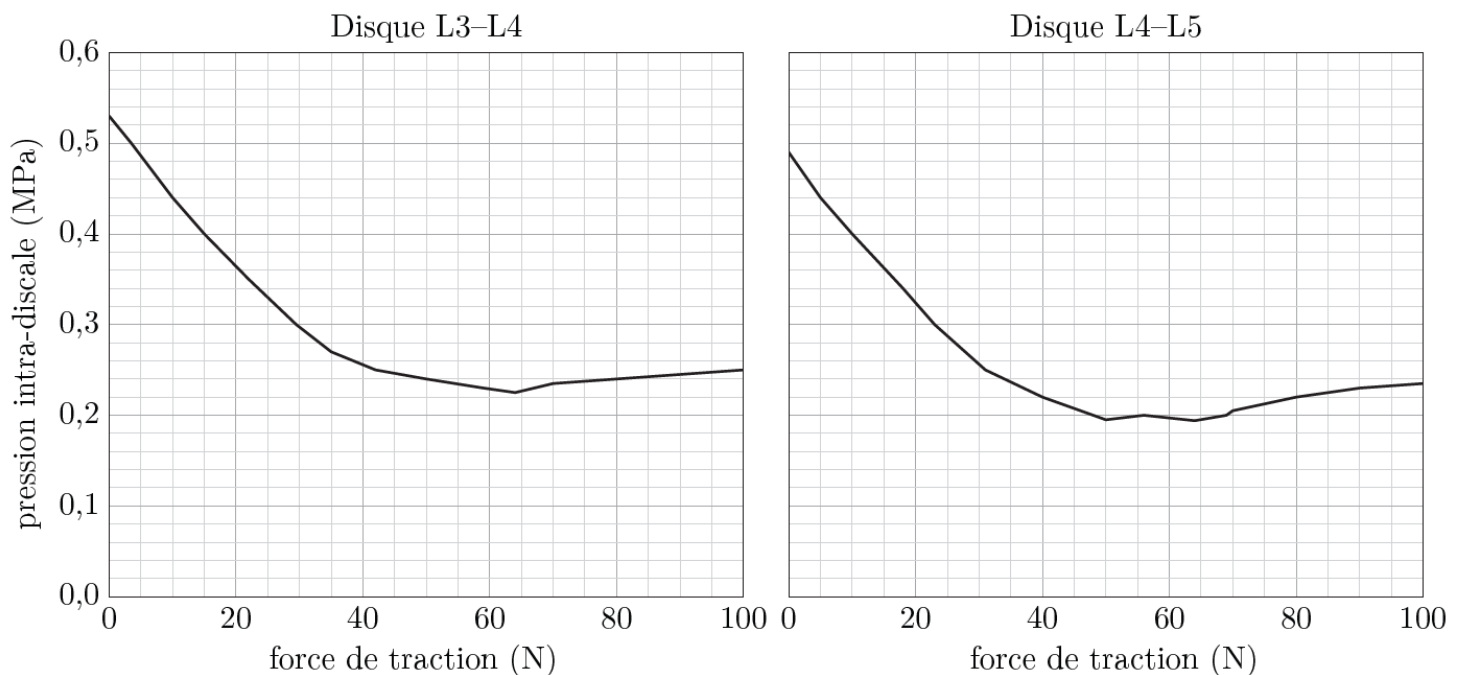
La société Japet a développé un modèle numérique biomécanique (figure 2 à gauche) du corps humain permettant de déterminer la valeur de la force de traction à exercer par les actionneurs pour soulager les disques intervertébraux en diminuant la pression intra-discale. Le modèle numérique biomécanique a permis d'obtenir les courbes de la figure 3 décrivant les évolutions des pressions intra-discales entre les vertèbres L3 – L4 et L4 – L5. Celles-ci ont été obtenues dans les conditions de simulation suivantes :

- colonne vertébrale verticale ;
- chaque actionneur linéaire développe une force de traction progressivement de 0 à 100 N ;
- l'évolution des forces de traction est lente afin de négliger les effets dynamiques.

**Question 1.** Après analyse des courbes de la figure 3, justifier que la force de traction choisie par le constructeur, afin de limiter la pression intra-discale, est de 40 N par actionneur.



**Figure 2** Modèle numérique biomécanique (à gauche) et détail de la structure vertébrale avec numérotation des vertèbres (à droite)



**Figure 3** Évolution de la pression intra-discale simulée en L3-L4 et L4-L5 en fonction de la force de traction développée par un seul actionneur linéaire

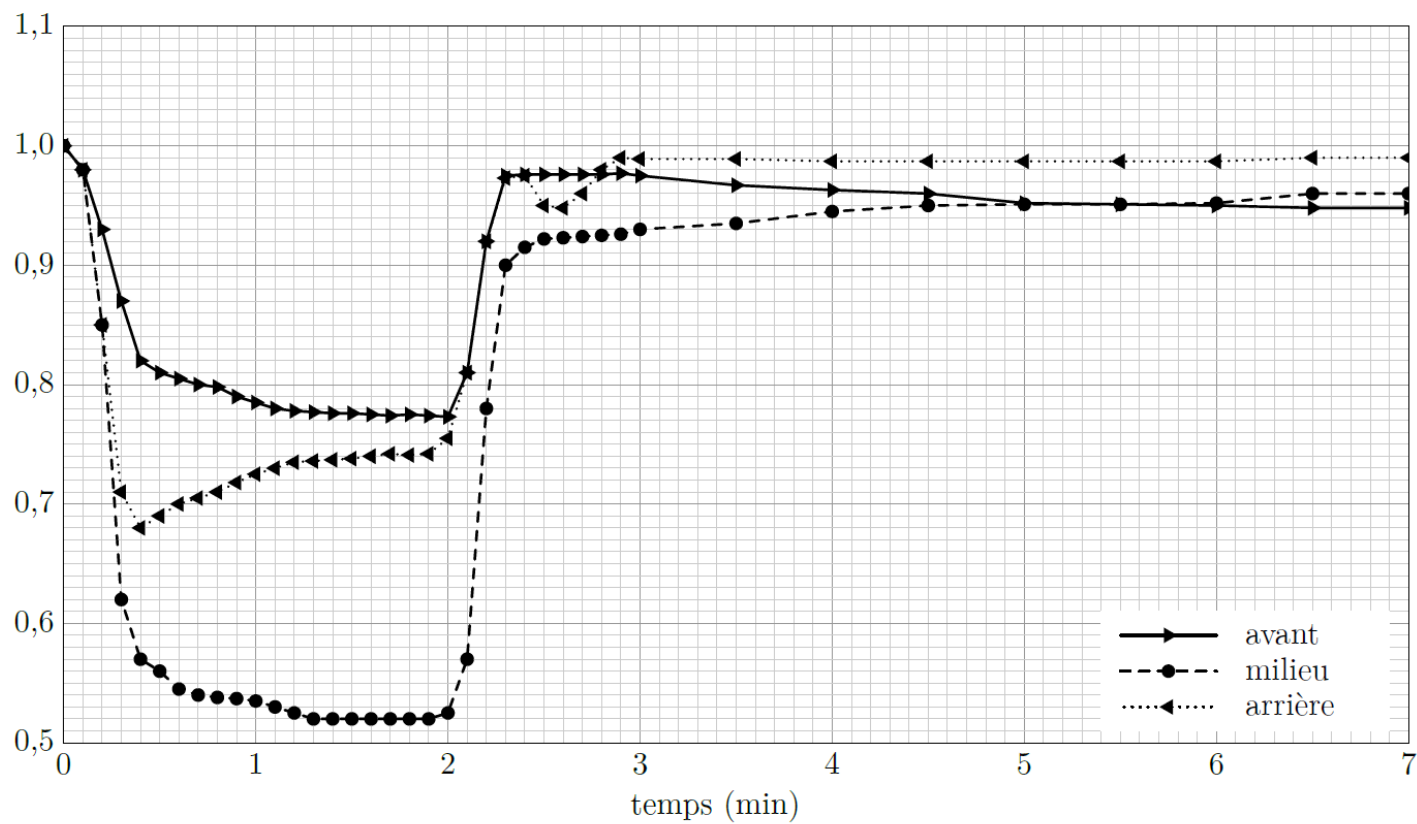
### I.C. Validation expérimentale du pré-dimensionnement des quatre actionneurs linéaires

**Objectif :** Montrer qu'il est possible de diminuer la pression intra-discale de 25 à 50 % dans le cas d'une utilisation au quotidien de l'exosquelette.

Des capteurs de pression ont été positionnés sur un cadavre (équipé de l'exosquelette Japet) dans le disque intervertébral L3 – L4 en trois positions différentes du disque (avant, milieu, arrière) afin de mesurer la pression

intra-discale réelle. Un effort de traction a été appliqué pour valider expérimentalement la baisse de pression intra-discale entre les vertèbres. Celles-ci ont été obtenues dans les conditions d’expérimentation suivantes :

- à l’instant  $t = 0$ , et pour une durée de 2 minutes, chaque actionneur linéaire développe une force de traction constante égale à 40 N ;
- à l’instant  $t = 2$  min, les forces de traction sont annulées.



**Figure 4** Évolution de la pression intra-discale mesurée et normalisée dans les trois positions du disque intervertébral L3-L4

Les résultats ont été normalisés afin de tenir compte des conditions initiales ( $t < 0$ ) en divisant les pressions mesurées par la pression intervertébrale initiale.

**Question 2.** Déterminer, pour les trois positions du capteur de pression dans le disque intervertébral L3-L4, la diminution moyenne de la pression intra-discale (en %) pendant les deux minutes d’application de l’effort de traction, sans prendre en compte la phase transitoire de 0 à 0,5 min.

Cette pré-étude théorique ainsi que la validation expérimentale permettent de montrer l’efficacité du soulagement intra-discal par un système externe actif. Le développement de l’exosquelette est basé sur ces résultats. L’analyse des résultats des expérimentations décrites précédemment a permis de définir le cahier des charges partiel proposé dans le tableau 1.

Id	Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
Id1	limiter la compression lombaire pour soulager les douleurs	Force de traction pour chaque actionneur linéaire	40 N	$< \pm 2,5 \%$
		Vitesse maximale de la montée de la force de traction	$100 \text{ N}\cdot\text{s}^{-1}$	nulle
Id2	Préserver l’activité musculaire, en garantissant la liberté de mouvement naturel du corps humain	Liberté totale de mouvement entre les ceintures basse et haute	6 degrés de liberté	aucune

**Tableau 1** Extrait du cahier des charges fonctionnel de l’exosquelette

## I.D.Problématique et organisation de l'étude

L'exosquelette lombaire, répertorié comme un système médical par les autorités de santé, doit garantir un fonctionnement sûr afin de ne causer aucun dommage à la colonne vertébrale tout en assurant une traction au niveau des vertèbres pour soulager les disques intervertébraux. Le mouvement naturel du corps devra être conservé.

Ceci implique que l'amplitude des mouvements de l'exosquelette lombaire devra s'adapter aux mouvements du corps et que l'effort d'assistance devra correspondre aux valeurs définies dans le cahier des charges partiel.

La problématique globale du sujet est de valider un modèle de connaissance simulant la capacité des actionneurs linéaires à exercer un effort de traction maîtrisé tout en garantissant la liberté de mouvement naturel du corps humain.

L'étude est limitée au mouvement de l'ensemble dans le plan sagittal (figure 5). Pour aborder la problématique, l'étude s'intéresse à :

- un degré de liberté particulier de la ceinture haute par rapport à la ceinture basse ;
- la capacité d'un actionneur linéaire à exercer une force de 40 N.

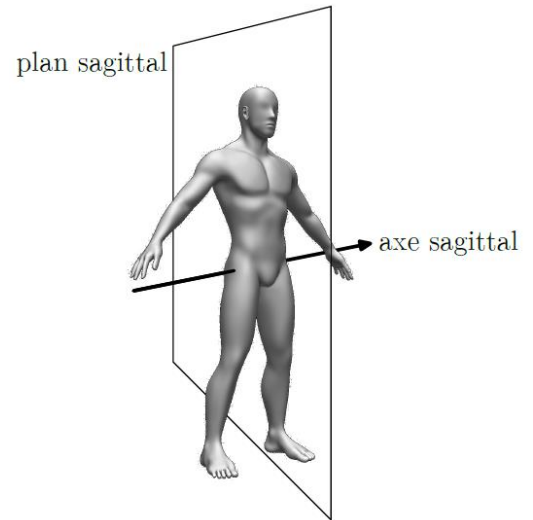


Figure 5 Plan et axe sagittal

Après avoir déterminé l'amplitude nécessaire du déplacement des actionneurs linéaires, l'étude portera sur la caractérisation dynamique et la commande d'un des quatre actionneurs linéaires. Cette dernière nécessite l'élaboration d'un modèle de connaissance du système étudié. La société Japet a construit un banc d'essai et de mesure. Ce banc d'essai a pour finalité de :

- contrôler l'amplitude nécessaire du déplacement des actionneurs linéaires ;
- comparer les résultats issus des simulations aux résultats expérimentaux pour une position particulière d'un actionneur linéaire, dans un premier temps.

Par la suite, le constructeur validera chaque actionneur linéaire commercialisé à l'aide du banc d'essai dans une démarche qualité.

## II.Étude de l'amplitude du déplacement de l'actionneur pour conserver un mouvement naturel

**Objectif :** Déterminer la course des actionneurs permettant de suivre les mouvements du corps conformément à l'exigence Id2 du cahier des charges partiel.

L'exigence Id2 « Préserver l'activité musculaire » est composée de deux exigences Id2.1 et Id2.2 (tableau 2). Le fonctionnement de l'exosquelette nécessite une mise en précontrainte. Pour cette mise en précontrainte, chaque actionneur linéaire doit exercer une force de 40 N. Cette valeur est obtenue par déplacement vertical de la ceinture haute par rapport à la ceinture basse.

Id	Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
Id2.1	Permettre le mouvement de translation de la ceinture haute par rapport à la ceinture basse	Déplacement vertical $\Delta h$ de la ceinture haute par rapport à la ceinture basse	$\Delta h = 50 \text{ mm}$	$< 10 \%$
Id2.2	Permettre le mouvement de rotation de la ceinture haute par rapport à la ceinture basse	Amplitude de rotation $\varphi$	$[0, +20^\circ]$ selon l'axe sagittal	$< 10 \%$

**Tableau 2** Extrait du cahier des charges fonctionnel limité au mouvement dans le plan sagittal de l'exosquelette

L'exigence Id2.1 correspond à la valeur du déplacement vertical nécessaire à la précontrainte. Cette valeur est propre à chaque utilisateur. Dans le cas extrême, cette valeur correspond à un déplacement vertical de 50 mm.

L'étude cinématique est limitée à un mouvement de flexion avant. La figure 6 décrit le mouvement ainsi que le positionnement de l'exosquelette dans le plan sagittal. La figure 7 décrit le modèle géométrique paramétré de l'exosquelette. La liaison sphère-cylindre en C modélise les degrés de liberté supprimés par les éléments extérieurs au système (colonne vertébrale + tissus mous).

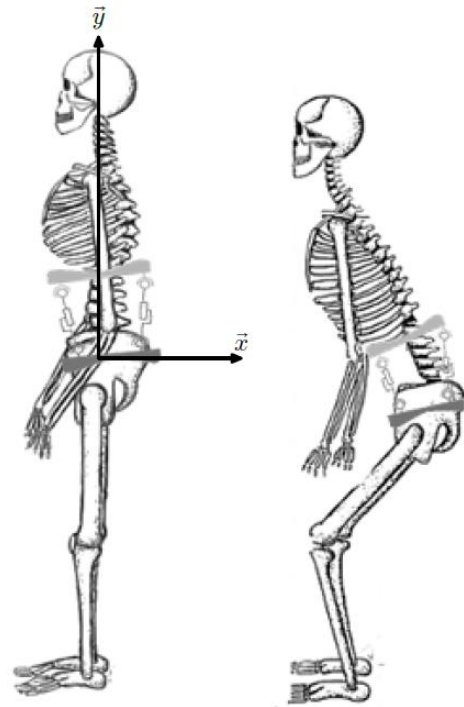
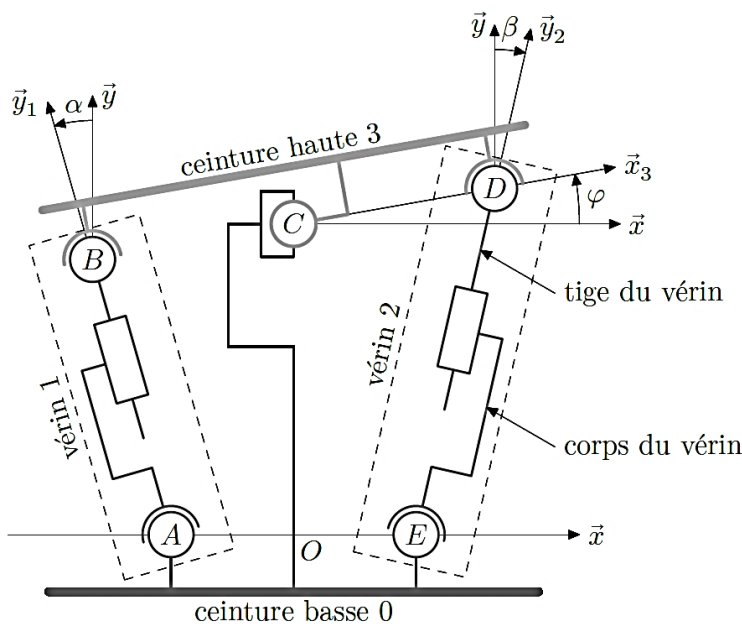


Figure 6 Mouvement de flexion et implantation de l'exosquelette

**Question 3.** Déterminer l'expression de la longueur  $l_2(t)$  en fonction de  $\varphi(t)$ ,  $h(t)$ ,  $b$  et  $a$ .



Paramétrage des solides

$$— \overline{BC} = \overline{CD} = b\vec{x}_3 ;$$

$$— \overline{AO} = \overline{OE} = a\vec{x}.$$

Paramétrage des liaisons

$$— \overline{AB} = l_1(t)\vec{y}_1 ;$$

$$— \overline{ED} = l_2(t)\vec{y}_2 ;$$

$$— \varphi(t) = (\vec{x}, \vec{x}_3) \text{ (angle de la ceinture haute par rapport à la ceinture basse selon l'axe sagittal) ;}$$

$$— \alpha(t) = (\vec{y}, \vec{y}_1) ;$$

$$— \beta(t) = (\vec{y}, \vec{y}_2) ;$$

$$— \overline{OC} = h(t)\vec{y} \text{ avec } h(t) \in [h_0, h_0 + \Delta h].$$

Figure 7 Paramétrage cinématique

Le protocole de mise en précontrainte et d'utilisation de l'exosquelette est le suivant :

1. à  $t = 0$ , mise en place de l'ensemble en ajustant sur le corps de l'utilisateur les deux ceintures basse et haute ( $h_0 = h(0)$ ) ;
2. pour  $t \in [0, T]$ , mise en précontrainte ( $h(T) = h_0 + \Delta h$ ) ;
3. pour  $t > T$ , mouvement libre (dans notre étude,  $\varphi(t)$  est limité de  $0^\circ$  à  $20^\circ$  selon l'axe sagittal).

On définit la course d'un actionneur linéaire comme étant la distance que peut parcourir la tige par rapport au corps entre ses positions extrêmes.

**Question 4.** Le point C restant sur l'axe  $(O, \vec{y})$ , déterminer la course du vérin 2 à partir du protocole défini précédemment pour les valeurs  $a = 100 \text{ mm}$ ,  $b = 150 \text{ mm}$ ,  $h_0 = 100 \text{ mm}$  et  $\Delta h = 50 \text{ mm}$ .



Une étude équivalente montre que la course du vérin 2 est supérieure à celle du vérin 1.

La course obtenue permet donc de dimensionner géométriquement les actionneurs en fonction des positions des points d'accroche sur les ceintures haute et basse. On peut ainsi définir la valeur de contrôle à mettre en place sur le banc d'essai. Cette valeur est vérifiée pour chaque actionneur fabriqué.

L'exigence sur la liberté de mouvement angulaire étant vérifiée, la suite de l'étude a pour but de caractériser la dynamique et la commande d'un des quatre actionneurs ce qui nécessite l'élaboration d'un modèle de connaissance. La validation sera faite à partir des résultats de la force de traction mesurée sur le banc d'essai.

### III.Élaboration du modèle de connaissance d'un actionneur placé sur un banc d'essai

#### III.A.Étude de la dynamique de l'actionneur linéaire dans le cas particulier représentatif de la mise en précontrainte étudiée à la question 3 modélisant le système dans cette configuration particulière

Objectif : Définir un modèle de connaissance de la dynamique du système permettant d'obtenir les équations d'un modèle de simulation comparable aux mesures du banc d'essai.

Le système est placé sur un banc d'essai en position horizontale (figure 8). Dans cette configuration, la pesanteur est portée par la direction  $\vec{z}_0$ . On rappelle que le banc fonctionne selon deux protocoles distincts

- vérification de la course définie précédemment (non étudiée ici) ;
- vérification de la force exercée par un actionneur linéaire pour effectuer la précontrainte.

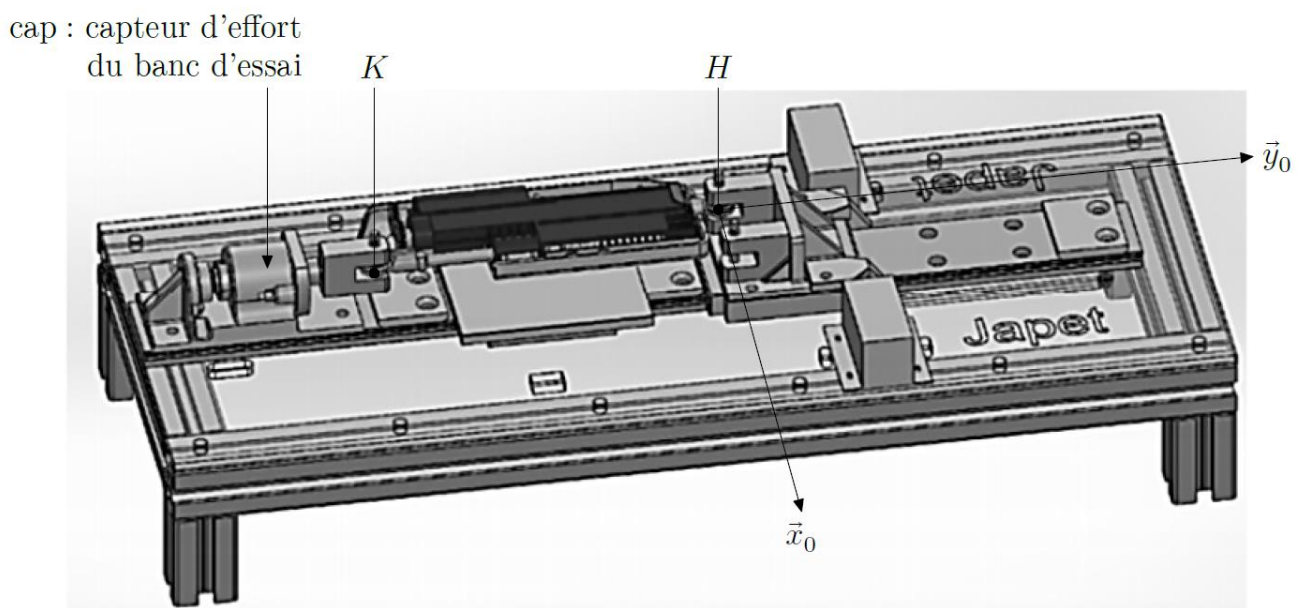


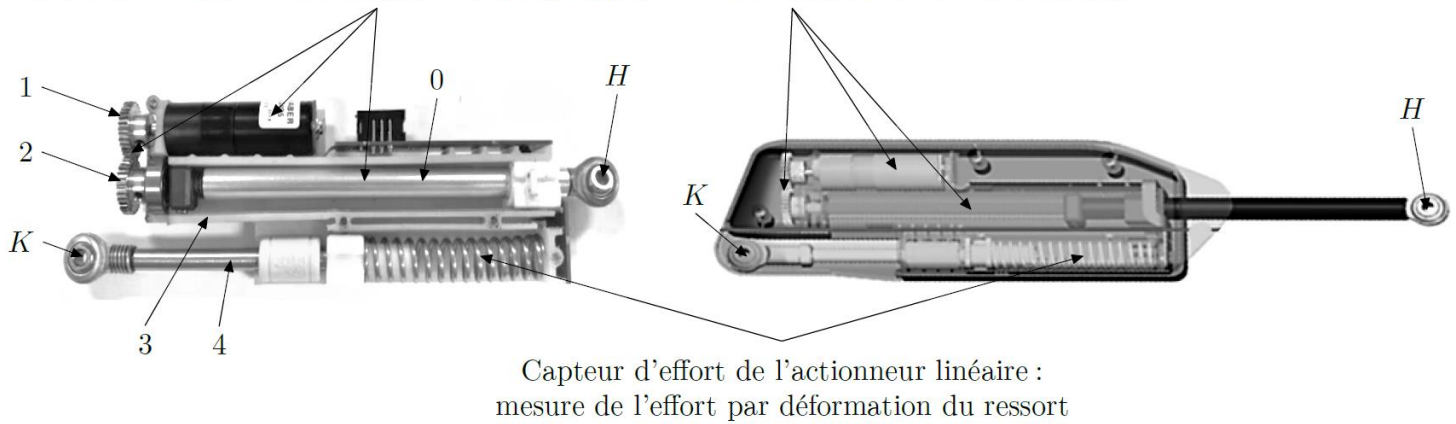
Figure 8 Banc d'essai

Pour la vérification de la force de précontrainte, l'actionneur linéaire est bloqué en  $H$  et un capteur d'effort, noté cap (figure 8), supposé indéformable, est placé en  $K$ . Cette configuration permet uniquement de valider la performance relative à la mise en précontrainte.

La raideur du ressort du capteur d'effort de l'actionneur linéaire (figure 9) a été choisie à partir d'une campagne d'essais réalisée par différents utilisateurs qui ont exprimé leur ressenti en donnant une note de confort.

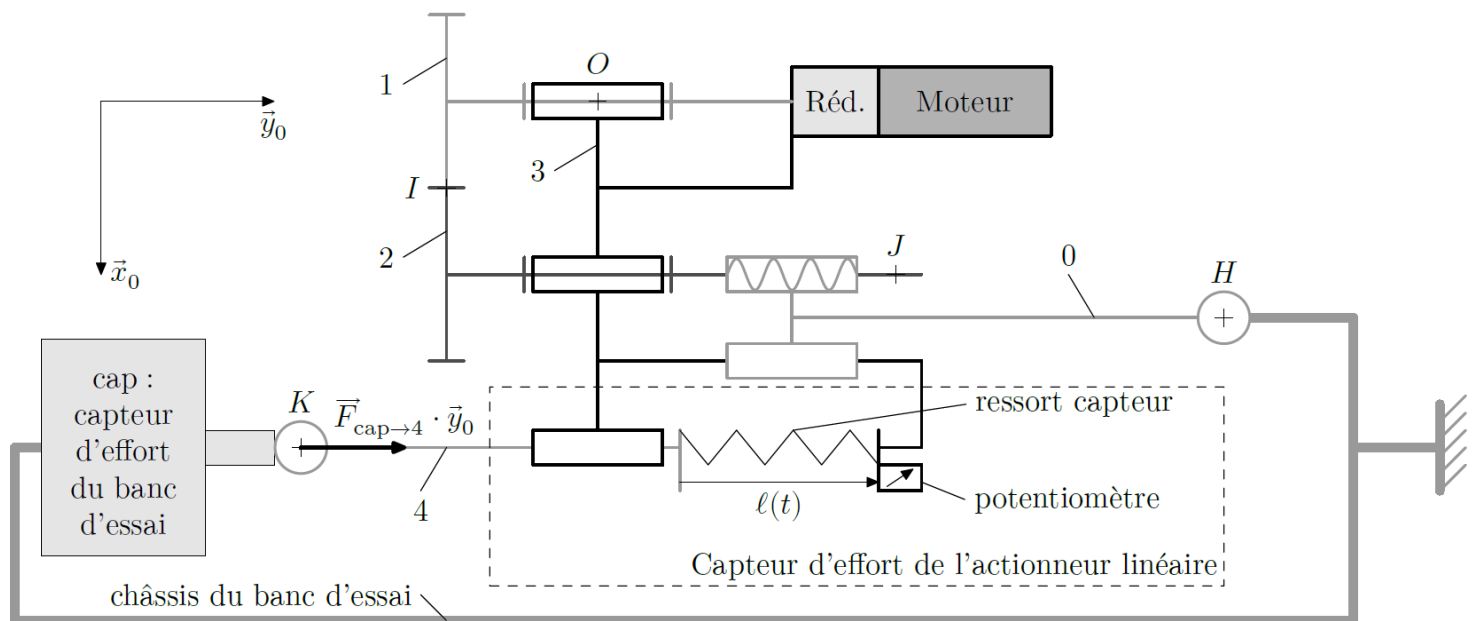
L'exploitation des données recueillies a permis au fabricant de déterminer le meilleur compromis parmi les retours des différents utilisateurs.

Chaine d'action : transmission de l'énergie par une chaîne moteur-réducteur-vis-écrou



**Figure 9** Actionneur linéaire

Dans la configuration spécifique retenue, les points  $K$  et  $H$  sont immobiles par rapport au châssis du banc d'essai. Les solides (0) et (4) sont immobiles par rapport au châssis du banc d'essai. L'action mécanique de l'actionneur linéaire sur le capteur d'effort du banc d'essai est un glisseur de support passant par  $K$  et de résultante  $\vec{F}_{cap \rightarrow 4}$ . Le capteur du banc d'essai mesure ainsi  $\vec{F}_{cap \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0$ . On suppose que c'est une image fidèle de la force de traction exercée par l'actionneur linéaire.



**Figure 10** Modèle d'étude de l'actionneur linéaire sur le banc d'essai

On note  $\ell(t)$  le déplacement de (3) par rapport à (4).

On a  $y(t) = \ell_0 - \ell(t)$  avec  $\ell_0$  la longueur à vide du ressort du capteur installé sur le système réel. Le ressort n'est pas préchargé avant le début de l'essai soit  $\ell(t=0) = \ell_0$ .

Le repère  $R_0(H; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au châssis du banc d'essai est supposé galiléen.

Les différentes grandeurs utiles à cette partie sont regroupées dans le tableau 3.

**Question 5.** En prenant soin de préciser le solide isolé et le théorème utilisé, déterminer l'expression littérale de la résultante  $\vec{F}_{cap \rightarrow 4}$  en projection sur  $\vec{y}_0$ , en fonction de  $K_{res}$  et  $y(t)$ .

**Question 6.** Déterminer le rapport  $\frac{\omega_{1/3}}{\omega_{2/3}}$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$  et faire l'application numérique. En déduire l'expression de  $\vec{V}_{J \in 3/R_0}$  en fonction de  $\omega_m(t)$ , pas et  $\lambda$ .

Éléments	Caractéristiques et notation
Corps du vérin 0	Masse : $m_0$
Moteur	Couple moteur : $C_{3 \rightarrow \text{arbre moteur}}(t) = c_m(t)$
	Moment d'inertie de l'arbre moteur suivant son axe : $I_m$
	Vitesse de rotation de l'arbre moteur : $\omega_m(t) = \omega_{m/3}$
	Masse négligeable devant les autres masses
Réducteur planétaire + pignon 1	Vitesse de rotation en sortie du réducteur : $\omega_r(t) = \omega_{1/3}$
	Rapport de réduction : $\lambda = \frac{\omega_r(t)}{\omega_m(t)}$
	Moment d'inertie équivalent reporté sur l'arbre de sortie du réducteur : $I_r$
	Masse négligeable devant les autres masses
Transmetteur par engrenage	Nombre de dents du pignon d'entrée 1 : $Z_1$
	Nombre de dents du pignon de sortie 2 : $Z_2 = Z_1$
Vis + pignon 2	Moment d'inertie suivant l'axe $(J, \vec{y}_0) : I_V$
	Vis de pas géométrique : $pas$ en $m \cdot tr^{-1}$ (à droite)
	Masse négligeable devant les autres masses
Ressort	Raideur $K_{res}$
	Masse négligeable devant les autres masses
Ensemble 3	Masse $m_3$ (les masses du carter moteur et du carter réducteur sont comprises dans la masse $m_3$ )
Tige de vérin 4	Masse : $m_4$
Rendement	Rendement global de l'actionneur linéaire, supposé constant : $\eta$

**Tableau 3** Caractéristiques principales de l'actionneur linéaire

On note  $\Sigma = \{(0), \text{arbre moteur}, (1), (2), (3), \text{ressort}, (4)\}$  l'ensemble mobile en mouvement par rapport à  $R_0$ .

**Question 7.** Déterminer l'expression des énergies cinétiques  $Ec(\text{arbre moteur}/R_0)$ ,  $Ec(1/R_0)$ ,  $Ec(2/R_0)$  et  $Ec(3/R_0)$  en fonction de  $\omega_m(t)$ ,  $pas$ ,  $\lambda$ , de la masse  $m_3$  et des inerties.

**Question 8.** Écrire l'expression de l'énergie cinétique  $Ec(\Sigma/R_0)$  et en déduire l'expression du moment d'inertie équivalent  $I_{eq}$  de l'ensemble mobile  $\Sigma$  reporté sur l'arbre moteur en fonction de  $pas$ ,  $\lambda$ , de la masse  $m_3$  et des inerties.

**Question 9.** Établir le bilan des puissances galiléennes des actions extérieures s'exerçant sur  $\Sigma$  et montrer qu'elles sont toutes nulles.

**Question 10.** Établir le bilan des puissances des actions intérieures à  $\Sigma$  et déterminer leurs expressions littérales en justifiant les résultats.

**Question 11.** Par composition des vecteurs vitesse en  $K$  entre les solides (4), (3) et (0), déterminer la relation entre  $\dot{y}(t)$ ,  $\omega_m(t)$ ,  $pas$  et  $\lambda$ .

Pour la suite, on définit  $K_{trans}$  tel que  $\dot{y}(t) = K_{trans} \omega_m(t)$ .

**Question 12.** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble  $\Sigma$  en mouvement par rapport à  $R_0$ , montrer que l'équation de mouvement s'écrit sous la forme.

$$I_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = Q \cdot c_m(t) - c_r(t) \quad \text{avec} \quad c_r(t) = T y(t)$$

où l'on précisera les expressions de  $Q$  et  $T$  en fonction de  $\eta$ ,  $K_{res}$  et  $K_{trans}$ .



**Question 13.** Exprimer l'équation différentielle du mouvement liant le déplacement  $y(t)$  à l'action mécanique  $c_m(t)$  en fonction des paramètres de  $Q$ ,  $T$  et  $K_{trans}$ . En déduire la valeur numérique du facteur d'amortissement et conclure quant à l'amortissement de la réponse indicielle.

Cet ensemble d'équations permet de mettre en place un modèle de connaissance de l'actionneur linéaire placé sur le banc d'essai et son analyse justifie la mise en place d'une structure particulière de l'asservissement.

### III.B.Étude de l'effort d'assistance nécessaire au soutien lombaire

Objectif : Proposer un modèle de connaissance de l'asservissement en force, le valider par comparaison avec une mesure sur un banc d'essai et vérifier les performances de l'actionneur linéaire sur un banc d'essai. Ce modèle permettra de valider une commande pour le cas spécifique étudié.

#### III.B.1.Mise en place d'un modèle de connaissance

L'actionneur linéaire placé sur le banc d'essai et sa commande peuvent être modélisés par le schéma-blocs représenté figure 11.

Notations et hypothèses :

- la transformée de Laplace de la fonction  $a(t)$  est notée  $A(p)$  dans le cas général ;
- les conditions de Heaviside sont supposées vérifiées ;
- $F_c(p)$  représente la consigne en force de l'asservissement de force, dans le domaine de Laplace ;
- $F(p)$  représente la force développée par l'actionneur linéaire, dans le domaine de Laplace.
- Les équations modélisant le comportement du moteur électrique (moteur à courant continu) muni d'une boucle d'asservissement de l'intensité du courant  $i_m(t)$ , sont :

en supposant le temps de réponse de la boucle de courant négligeable,

$$u_I(t) = R i_m(t)$$

par application des théorèmes généraux de la dynamique appliqués à l'ensemble des solides en mouvement,

$$I_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = Q \cdot c_m(t) - c_r(t) \quad \text{avec} \quad c_r(t) = T y(t)$$

loi de couplage électromécanique,

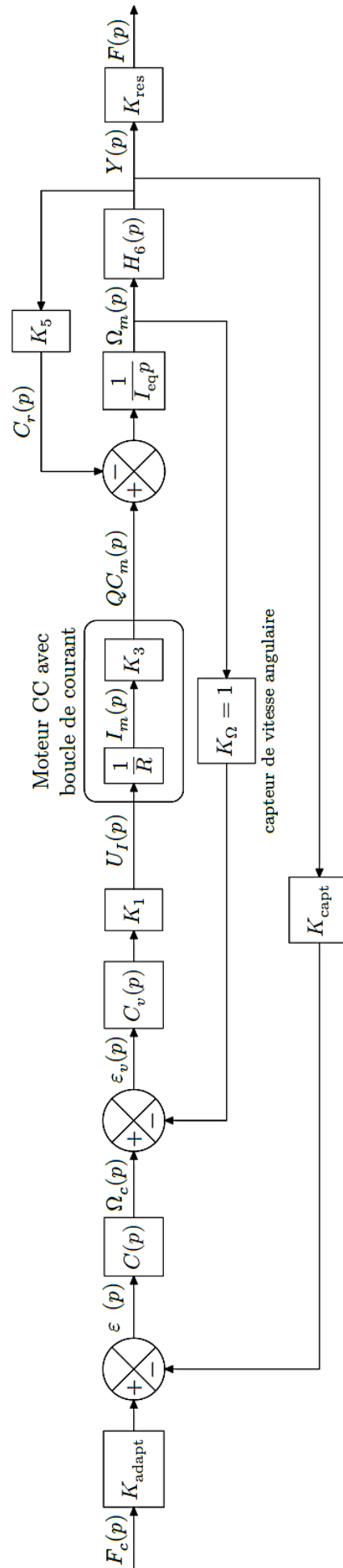
$$c_m(t) = k_c i_m(t)$$

Avec :

- $u_I(t)$ , la consigne en tension de la boucle d'asservissement de l'intensité du courant  $i_m(t)$  (en V) ;
- $i_m(t)$ , l'intensité du courant d'induit absorbé par le moteur à courant continu (en A) ;
- $R$ , la résistance d'induit du moteur (en  $\Omega$ ) ;
- $k_c$ , la constante de couple (en  $N \cdot m \cdot A^{-1}$ ) ;
- $I_{eq}$ , le moment d'inertie équivalent des solides en mouvement par rapport au référentiel lié au bâti supposé galiléen, reportée sur l'arbre moteur (en  $kg \cdot m^2$ ) ;
- $K_1$ , le gain du modulateur d'énergie.

**Question 14.** Après avoir transformé les équations précédentes dans le domaine de Laplace, exprimer les gains  $K_3$  et  $K_5$  en fonction de  $Q$ ,  $k_c$  et  $T$  puis exprimer la fonction de transfert  $H_6(p)$  en fonction de  $K_{trans}$ .

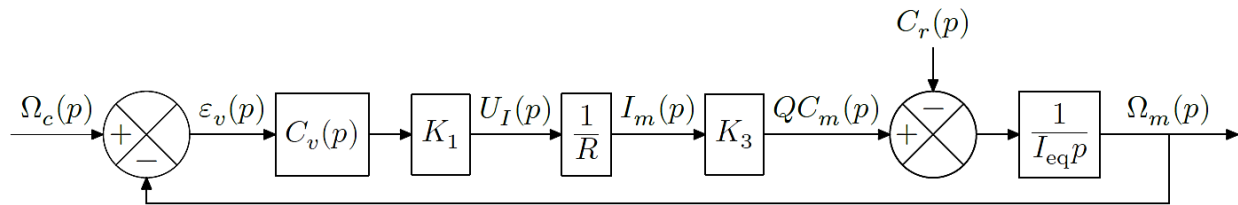
**Question 15.** En supposant le système stable, déterminer l'expression de  $K_{adapt}$  en fonction de  $K_{capt}$  et  $K_{res}$  qui assure que l'écart en régime permanent ( $\mathcal{E}(t \rightarrow \infty)$ ) soit nul si l'erreur en régime permanent est nulle (soit  $F(p) = F_c(p)$ ).



**Figure 11** Schéma-blocs de l'asservissement de force développée par un actionneur linéaire placé sur le banc d'essai

### III.B.2. Réglage partiel de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Le schéma-blocs décrivant la structure de l'asservissement de la vitesse angulaire du moteur est fourni sur la figure 12. Cet asservissement doit respecter le cahier des charges fourni dans le tableau 4.



**Figure 12** Schéma-blocs de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur électrique

Critère concepteur	Niveau
Marge de phase	$\geq 80^\circ$
Erreur en régime permanent pour une perturbation en échelon constante	Nulle
Pulsation de coupure à 0 dB	$\omega_{0\text{ dB}} = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$

**Tableau 4** Critères concepteur pour la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire

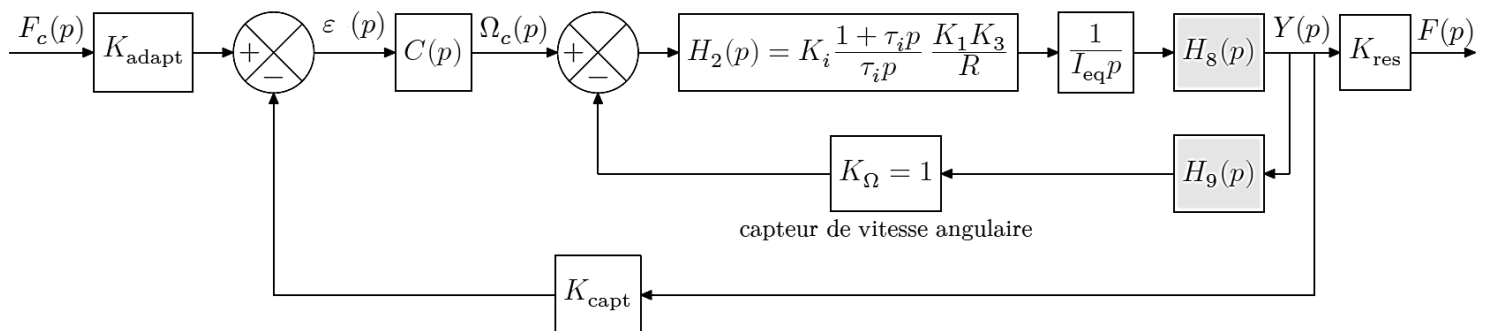
Le choix d'un correcteur proportionnel intégral est fait afin de diminuer l'influence de la perturbation en couple modélisée par  $C_r(p)$ . La fonction de transfert du correcteur de la boucle d'asservissement en vitesse angulaire est noté  $C_v(p)$ , tel que :

$$C_v(p) = K_i \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$$

**Question 16.** Par un calcul adéquat, justifier que ce choix de correcteur permet de respecter le critère de précision vis-à-vis d'un couple résistant constant.

### III.B.3. Simplification du modèle de connaissance

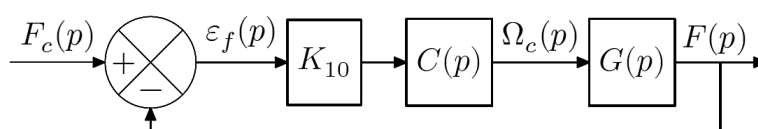
Il est possible de mettre le schéma-blocs de la figure 11 sous la forme du schéma-blocs de la figure 14, afin de faciliter la prévision des performances simulées.



**Figure 14** Schéma-blocs de l'asservissement de la force développée par un actionneur linéaire

**Question 17.** Déterminer les fonctions de transfert  $H_8(p)$  et  $H_9(p)$  en fonction de  $K_5$ ,  $I_{eq}$  et  $H_6(p)$ . Ne pas remplacer  $K_5$  et  $H_6(p)$  par les expressions trouvées précédemment.

Pour faciliter l'analyse des performances simulées, le schéma-blocs de la figure 14 est adapté afin de disposer d'un schéma-blocs à retour unitaire, tel que décrit sur la figure 15.



**Figure 15** Schéma-blocs de l'asservissement de la force développée par un actionneur linéaire à retour unitaire

**Question 18.** Déterminer l'expression du gain  $K_{10}$  en fonction de  $K_{adapt}$  et de  $K_{res}$ .

**Question 19.** Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$  en fonction de  $H_2(p)$ ,  $I_{eq}$ ,  $H_8(p)$ ,  $H_9(p)$  et  $K_{res}$ . Ne pas remplacer  $H_2(p)$ ,  $H_8(p)$  et  $H_9(p)$  par les expressions trouvées précédemment.

Pour la suite, on donne la fonction de transfert  $G(p)$ , obtenue avec les valeurs de réglage permettant le respect des exigences du tableau 4,

$$G(p) = \frac{F(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1 + \tau_i p}{p} \frac{1,2 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-4} + 9,7 \times 10^{-5} p + 5,3 \times 10^{-6} p^2}.$$

### III.B.4. Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Il est proposé dans cette section d'analyser les performances simulées de l'asservissement en force dont un extrait du cahier des charges est présenté dans le tableau 5.

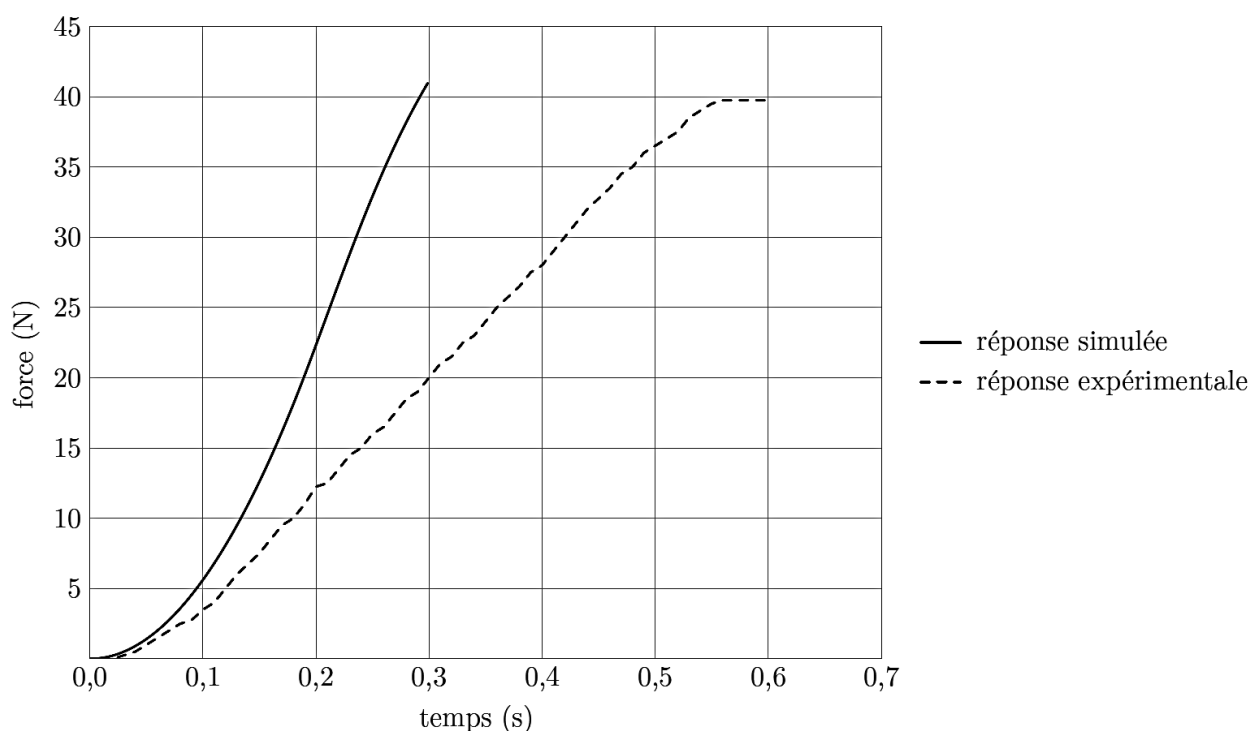
Id	Exigence	Critère	Niveau
Id1.1	Stabilité	Marge de phase	$\geq 60^\circ$
		Marge de gain	$> 20$ dB
		Dépassement maximal	$< 2,5\%$
Id1.2	Précision	Erreur en régime permanent pour une entrée en échelon	$< 1\%$
Id1.3	Rapidité	Temps de réponse à 5 % pour une consigne en échelon de force de 40 N	$tr_{5\%} < 1$ s
		Vitesse maximale de montée de la force de traction	$100 \text{ N}\cdot\text{s}^{-1}$

**Tableau 5** Extrait du cahier des charges fonctionnel de l'actionneur linéaire sur le banc d'essai

Le correcteur envisagé dans l'asservissement de la force est de type proportionnel :  $C(p) = K_{cor}$

Les courbes sur la figure 16 représentent les réponses temporelles du modèle de connaissance de la figure 11, avec les correcteurs  $C_v(p)$  et  $C(p)$  correctement réglés, et de l'expérimentation sur le banc d'essai pour une consigne en échelon de force de 40 N.

**Question 20.** Quel critère du tableau des exigences (tableau 5) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance ? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel ?



**Figure 16** Réponses temporelles du modèle et expérimentale, pour une consigne en échelon de force de 40 N

Le réglage du correcteur  $C(p)$  permettant le respect des marges de stabilité donne  $K_{cor} = 5400 \text{ rad V}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Ce qui explique la pente élevée visible sur la courbe de la réponse simulée figure 16.

Pour améliorer notre modèle, on envisage d'installer une saturation en vitesse angulaire du moteur.

### III.B.5. Amélioration du modèle. Mise en place d'une limitation en vitesse (partie ITC optionnelle)

Pour améliorer le modèle de connaissance et le valider, la comparaison entre la réponse simulée issue du modèle de connaissance amélioré et la réponse expérimentale sera traitée par résolution numérique informatique. Le langage de programmation utilisé est Python.

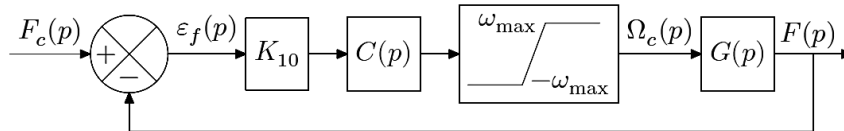


Figure 17 Schéma-blocs de l'asservissement de force développée par l'actionneur linéaire avec limitation de la vitesse angulaire

Notations et hypothèses :

- $f(t)$  est la grandeur de sortie de l'asservissement en force, de variable de Laplace  $F(p)$  ;
- $f_c(t)$  est la grandeur de consigne de l'asservissement en force, de variable de Laplace  $F_c(p)$  ;
- $\omega_c(t)$  est la commande de vitesse angulaire du moteur, de variable de Laplace  $\Omega_c(p)$  ;
- la dérivée première temporelle d'une fonction  $h(t)$  est notée  $\dot{h}(t)$  et sa dérivée seconde  $\ddot{h}(t)$  ;
- les conditions de Heaviside sont supposées vérifiées, soient  $f(t=0) = 0$  et  $\dot{f}(t=0) = 0$ .

#### a) Cadre général de la résolution numérique d'un problème de Cauchy

Pour déterminer numériquement la solution  $E(t)$  d'une équation différentielle, il faut préalablement la mettre sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\dot{E}(t) = F_{\text{Cauchy}}(E(t), t) \quad \text{avec} \quad E(t=0) = E_0.$$

$E(t)$  est appelé vecteur d'états à l'instant  $t$ ,  $\dot{E}(t)$  représente le vecteur composé des dérivées premières des états par rapport au temps  $t$ ,  $F_{\text{Cauchy}}$  la fonction de Cauchy et  $E_0$  le vecteur d'états des conditions initiales.

Le problème étant décrit sous la forme de Cauchy, la résolution numérique peut être menée par un schéma numérique du type Euler explicite ou en utilisant la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy`.

#### b) Problème de Cauchy lié à l'équation différentielle associée à $G(p)$

Compte-tenu du correcteur  $C_v(p)$  de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur électrique réglé aux questions 17 et 18, il est possible de simplifier la fonction de transfert  $G(p)$ . L'équation différentielle associée à  $G(p)$  simplifiée s'écrit

$$\ddot{f}(t) + 18\dot{f}(t) = 1,18\omega_c(t).$$

Dans le cadre de la résolution de l'équation différentielle globale liée à l'asservissement de force développée par un actionneur linéaire (Figure 17) la vitesse angulaire de consigne  $\omega_c(t)$  est une fonction du temps inconnue à ce stade.

Le vecteur d'états associé à l'étude de  $G(p)$  retenu est  $E(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix}$ , ainsi  $\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ \ddot{f}(t) \end{pmatrix} = G(E(t), \omega_c(t), t)$ .

**Question 21** Déterminer la fonction  $G(E(t), \omega_c(t), t)$ , associée à  $G(p)$ .

**Question 22** Écrire en langage Python la fonction `G(E, wc, t)` qui implémente la fonction  $G(E(t), \omega_c(t), t)$ . Cette fonction renvoie une liste de deux nombres à virgule flottante et prend en paramètres

- `E`, une liste de deux nombres représentant le vecteur d'états ;
- `wc`, un nombre représentant la consigne de vitesse angulaire du moteur ;
- `t`, un nombre représentant le temps.



c) *Problème de Cauchy lié au schéma-blocs de la figure 16 sans la limitation en vitesse angulaire*

Le correcteur de la boucle d'asservissement de la force développée par un actionneur linéaire est un correcteur proportionnel tel que  $C(p) = K_{\text{cor}}$ . Ainsi, en l'absence de limitation, la grandeur  $\omega_c(t)$  est telle que

$$\omega_c(t) = K_{\text{cor}} K_{10} \varepsilon_f(t) = K_{\text{cor}} K_{10} (f_c(t) - f(t)).$$

Il reste à exprimer la fonction de Cauchy pour la boucle fermée de l'asservissement de force

$$\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ \ddot{f}(t) \end{pmatrix} = FBFsl(E(t), t).$$

On considère dès à présent que la consigne de force  $f_c(t)$  est un échelon d'amplitude  $F_{\text{cons}}$ , prise égale à 40 N.

**Question 23** Recopier et compléter le programme Python de la figure 18 implémentant la fonction `FBFsl` qui renvoie une liste de deux nombres et prend en paramètres

- `E`, une liste de deux nombres représentant le vecteur d'états ;
- `t`, un nombre représentant le temps.

```
def FBFsl(E, t):
    Fcons = 40      # échelon de consigne de 40 N
    K10 = 0.0277    # adaptation
    Kcor = 5400     # gain du correcteur proportionnel
    wc = à compléter
    Compléter en terminant la fonction.
```

figure 18 Programme de calcul de la fonction *FBFsl*, à compléter

d) *Problème de Cauchy lié au schéma-blocs de la figure 17 avec la limitation en vitesse angulaire*

La consigne de vitesse angulaire du moteur électrique doit être limitée, conformément au schéma-blocs de la figure 17.

**Question 24** Recopier et compléter le programme Python de la figure 19 implémentant la fonction `FBFal` qui renvoie une liste de deux nombres et prend en compte la limitation de la consigne de vitesse angulaire du moteur.

```
def FBFal(E, t):
    Fcons = 40      # échelon de consigne de 40 N
    K10 = 0.0277    # adaptation
    Kcor = 5400     # gain du correcteur proportionnel
    wcmax = 1250    # limitation en vitesse angulaire dans l'intervalle [-wcmax, wcmax]
    Compléter avec le calcul de wc et terminer la fonction.
```

figure 19 Programme de calcul de la fonction *FBFal*, à compléter

La figure 20 présente la réponse temporelle du modèle de connaissance du système avec correction proportionnelle et limitation pour une consigne de force en échelon d'amplitude  $F_{\text{cons}} = 40$  N.

**Question 25** Conclure sur la capacité du correcteur proportionnel avec limitation de la vitesse angulaire à respecter le cahier des charges, en analysant l'écart entre les performances simulées (figure 20) et les performances attendues. Se limiter aux critères pertinents du tableau 5.

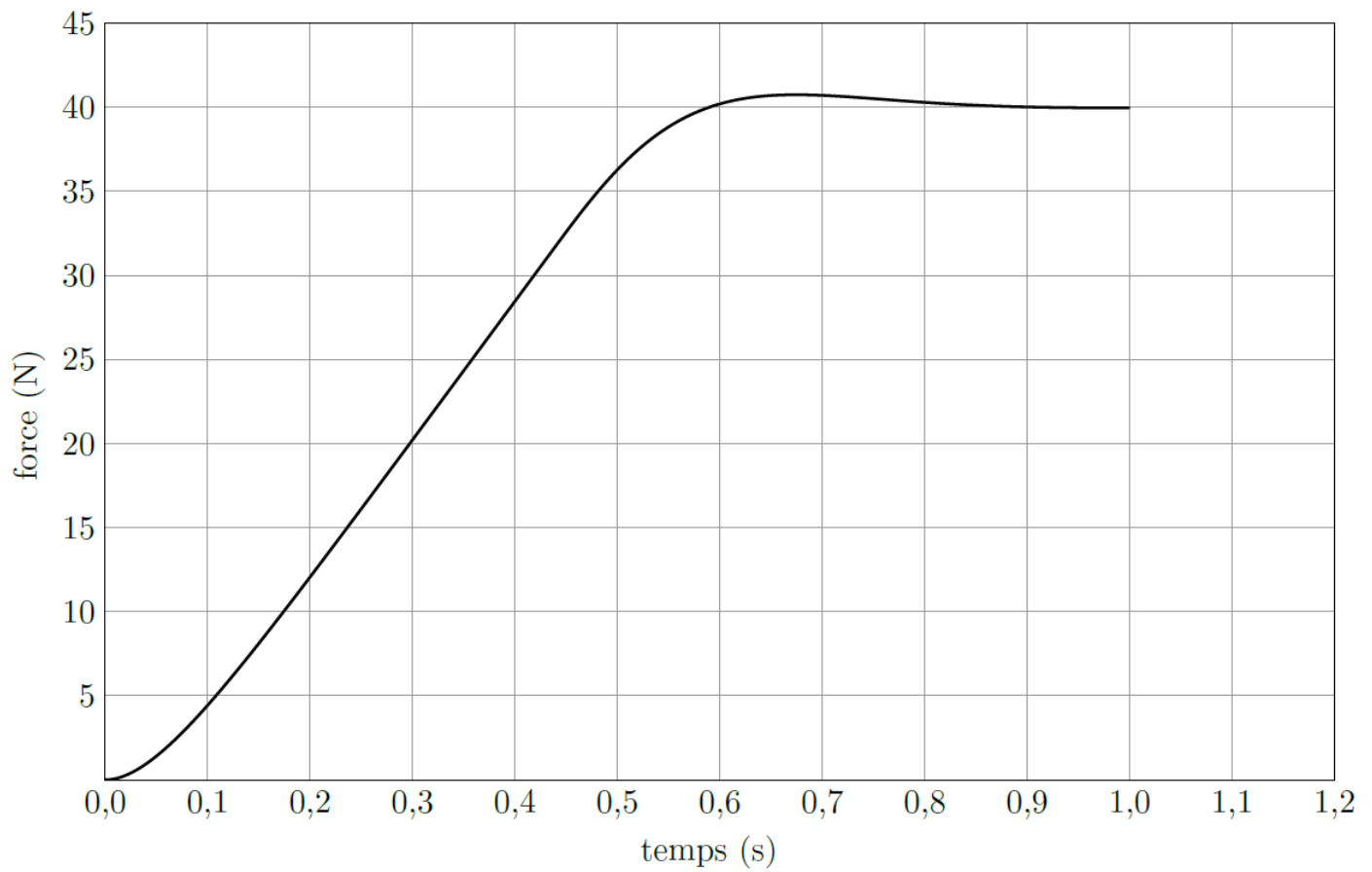


Figure 20 Réponse temporelle du modèle de connaissance pour une consigne de 40 N avec correction proportionnelle et limitation de la vitesse angulaire

## Problème N°2 : Inverseur de poussée eTras

### I. Présentation

Le système étudié, appelé inverseur de poussée, est un dispositif utilisé dans le domaine de l'aéronautique commerciale ou privée permettant de contribuer au freinage d'un avion lors de sa phase d'atterrissage sur piste.

L'inversion de poussée est obtenue grâce à la déviation du flux d'air secondaire. En position fermée (partie haute de la Figures 2a), les parties fixe et mobile de la nacelle sont jointes et les volets sont intégrés dans la partie mobile. Le flux d'air secondaire s'écoule normalement.

En position ouverte (figure 2b), le déplacement de la partie mobile de la nacelle entraîne le déplacement des volets. Ces derniers viennent dévier le flux d'air secondaire et l'oblige à sortir par l'orifice ainsi créé par la translation de la partie mobile de la nacelle. La partie mobile munie d'un béquet déflecteur dirige le flux vers l'avant créant ainsi un effet de "reverse".

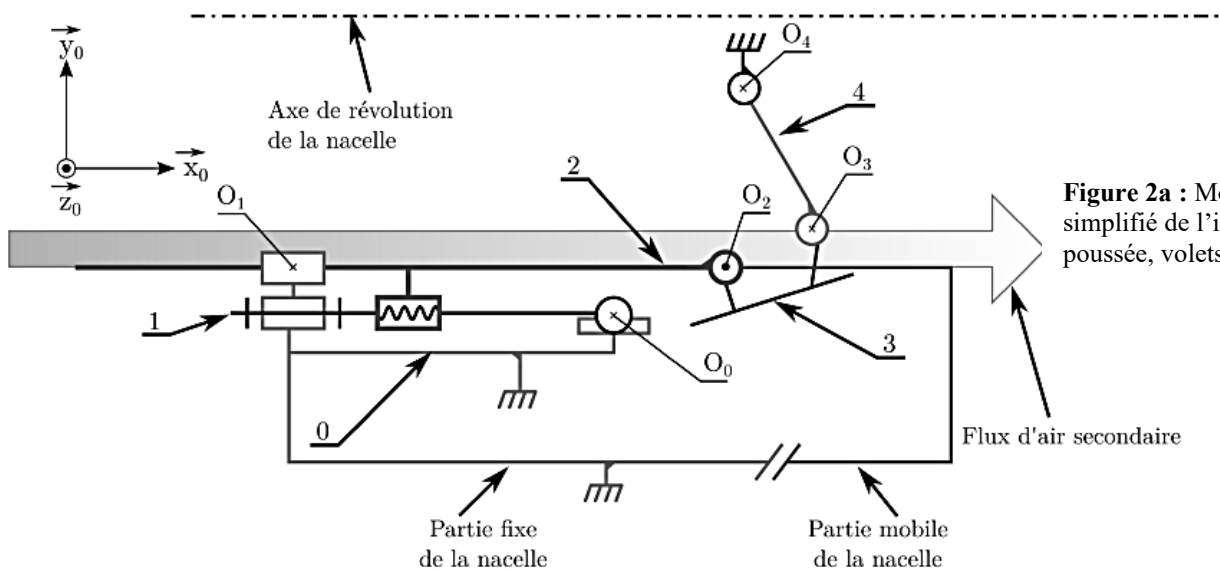
L'inversion ne se faisant que sur le flux secondaire, la contre-poussée devra être importante pour annuler l'effet du flux primaire qui n'est pas inversé.



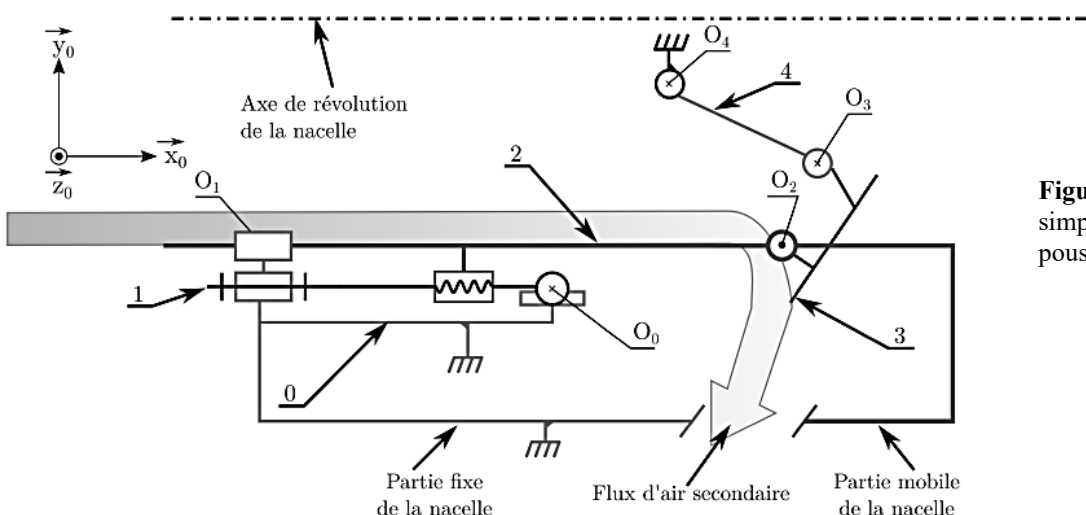
Nacelle fermée  
Inverseur de poussée non activé

Nacelle ouverte  
Inverseur de poussée activé

**Figure 1** : mise en évidence d'un inverseur de poussée activé sur une nacelle lors d'un atterrissage



**Figure 2a** : Modèle simplifié de l'inverseur de poussée, volets ouverts



**Figure 2b** : Modèle simplifié de l'inverseur de poussée, volets fermés

## II. Analyse de la chaîne structurale de l'eTras

Afin de réduire au maximum la masse embarquée dans la nacelle, un seul actionneur de 25kW, un moteur à courant continu, est utilisé pour mouvoir la partie mobile de la nacelle. Ce moteur permet d'entraîner simultanément 4 systèmes vis-écrous transformant le mouvement de rotation du moteur en translation. Cette transmission de puissance depuis le moteur vers les systèmes vis-écrous est réalisée par l'intermédiaire de composants flexibles appelés des flex-shafts. Ces éléments flexibles permettent de transmettre la puissance mécanique tout en respectant les contraintes de masse et de géométrie de la nacelle. L'Annexe 1 permet de visualiser l'architecture du système eTras®

## III. Modélisation du comportement du système en aval des flex-shafts

La Figure 2a représente la structure de la chaîne cinématique lorsque la nacelle est en position fermée, aucune commande de contre-poussée n'est activée. Le flux d'air secondaire suit une trajectoire rectiligne suivant la direction  $\vec{x}_0$ . La Figure 2b représente la position fermée d'un des volets, ce qui permet de dévier le flux d'air secondaire afin de générer la contre-poussée. Le Tableau 1 permet de référencer l'ensemble des composants de cette chaîne cinématique. La pièce 1 est entraînée par l'intermédiaire d'un flexshaft qui lui impose un couple causant son mouvement de rotation.

Pièce 0	Bâti, partie fixe de la nacelle
Pièce 1	Vis à billes, entraînée par le flex-shaft
Pièce 2	Écrou, partie mobile de la nacelle
Pièce 3	Volet
Pièce 4	Bielle

Tableau 1 : nomenclature des pièces

On considère dans cette étude que l'ensemble de la nacelle admet une symétrie de révolution autour de l'axe  $(O_1, \vec{x}_0)$ . On étudie le mouvement d'un seul volet en supposant que le comportement cinématique de l'ensemble des volets est analogue.

### Paramétrage géométrique adopté pour l'étude :

- La vis (1) du vérin à vis est en liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  par rapport au bâti (0). On définit l'angle  $\theta_f(t)$  tel que  $\theta_f(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ ;
- La vis (1) est en liaison sphère-cylindre de centre  $O_0$  et d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  par rapport au bâti (0) ;
- La vis (1) est en liaison hélicoïdale d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  par rapport à l'écrou (2) fixé à la partie mobile de la nacelle. On note  $p$  le pas (à droite) de la vis (en m/tour) ;
- La partie mobile (2) est en liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  par rapport au bâti ;
- Le volet (3) est en liaison pivot glissant d'axe  $(O_2, \vec{z}_2)$  par rapport à la partie mobile (2). On définit l'angle  $\theta_b(t)$  tel que  $\theta_b(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$  ;
- Le volet (3) est en liaison pivot d'axe  $(O_3, \vec{z}_2)$  par rapport à la bielle (4). On définit l'angle  $\theta_{43}(t)$  tel que  $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{y}_3, \vec{y}_4)$  ;
- La bielle (4) est en liaison pivot d'axe  $(O_4, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti (0). On définit l'angle  $\theta_{40}(t)$  tel que  $\theta_{40}(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$  ;
- Soit  $\vec{O_1O_2} = \lambda(t) \vec{x}_0$ ,  $\vec{O_2O_3} = L_3 \vec{x}_3$ ,  $\vec{O_3O_4} = L_4 \vec{y}_4$  et  $\vec{O_4O_1} = -L \vec{x}_0 - H \vec{y}_0$ .

nombre de volets	22
valeur minimale de $\theta_b$	5°
valeur maximale de $\theta_b$	85°
longueur de la bielle 3 : $L_3$	320 mm
longueur de la bielle 4 : $L_4$	400 mm
L	422 mm
H	400 mm
pas à droite de la vis à billes : pas	8 mm.tr <sup>-1</sup>
fréquence nominale de rotation du moteur : $N_m$	2000 tr.min <sup>-1</sup>

Tableau 2 : Grandeurs caractéristiques de la cinématique de l'inverseur de poussée

## IV. Modélisation du couple sur le flex-shaft dû à l'action de la contre-poussée

Afin d'évaluer les performances du moteur électrique employé pour la phase de contre-poussée, on supposera que les volets sont en position fermée (Figure 2b) et qu'ils sont soumis à la pression du flux d'air secondaire lorsque l'avion est en phase de freinage. On se place en phase de freinage et les volets sont en position fermée.

### a) Hypothèses et données

- La pression constante du flux secondaire sur le volet est notée  $p_s$  et vaut 2,5 kPa ;
- On note  $p$  le pas de la vis en m/tr ;
- On supposera que toutes les liaisons sont énergétiquement parfaites ;
- Le champ de gravitation est noté  $-g \vec{y}_0$  ;
- On note  $V_{20}(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt}$  telle que  $\overrightarrow{V}(O_2 \in 2/R_0) = V_{20}(t) \vec{x}_0$  ;
- La distance entre le point  $O_2$  et le volet est considérée négligeable dans cette partie ;
- Dans toute la suite du sujet on notera le torseur des actions mécaniques du solide  $i$  sur le solide  $j$  par le torseur suivant :

$$\mathcal{T}_{i \rightarrow j} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(i \rightarrow j) = X_{ij} \vec{x}_0 + Y_{ij} \vec{y}_0 + Z_{ij} \vec{z}_0 \\ \vec{M}(O_j | i \rightarrow j) = L_{ij} \vec{x}_0 + M_{ij} \vec{y}_0 + N_{ij} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{(0)}$$

### b) Détermination des actions mécaniques du flux secondaire sur le volet

On étudie dans cet exemple l'action mécanique de l'air sur un seul volet pour en déduire une relation entre l'action de l'air sur ce volet et le couple au niveau d'un flex-shaft. La Figure 3 représente un des volets de l'inverseur de poussée sur la gauche ainsi que son modèle numérique simplifié pris en compte pour cette étude sur la droite.

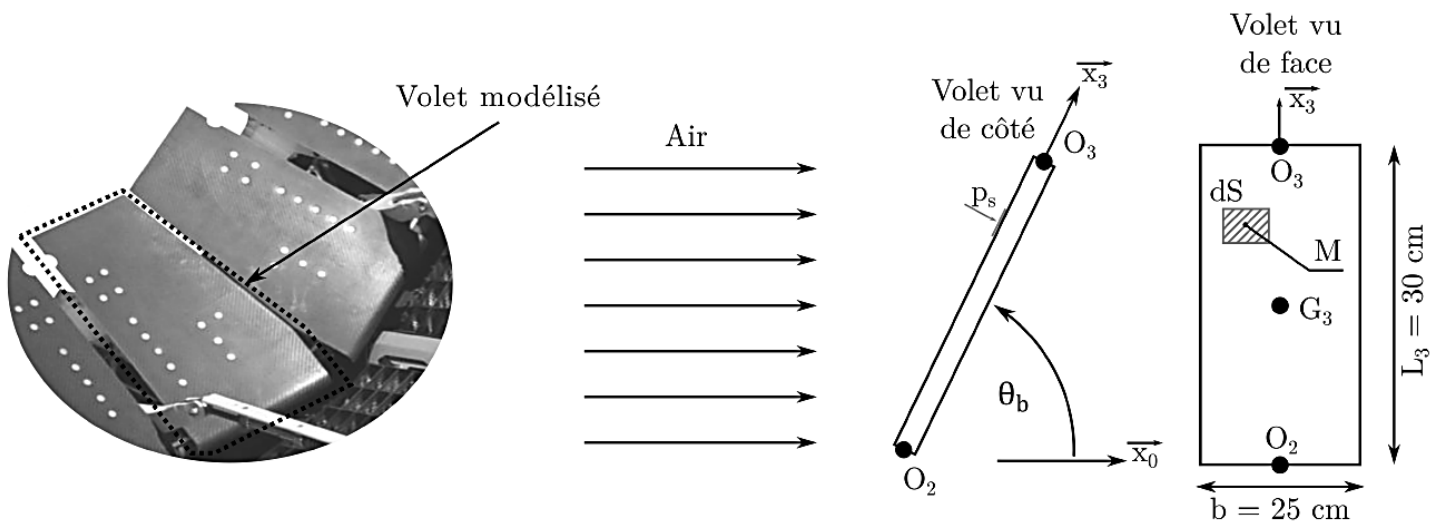


Figure 3 : Modèle d'un des volets

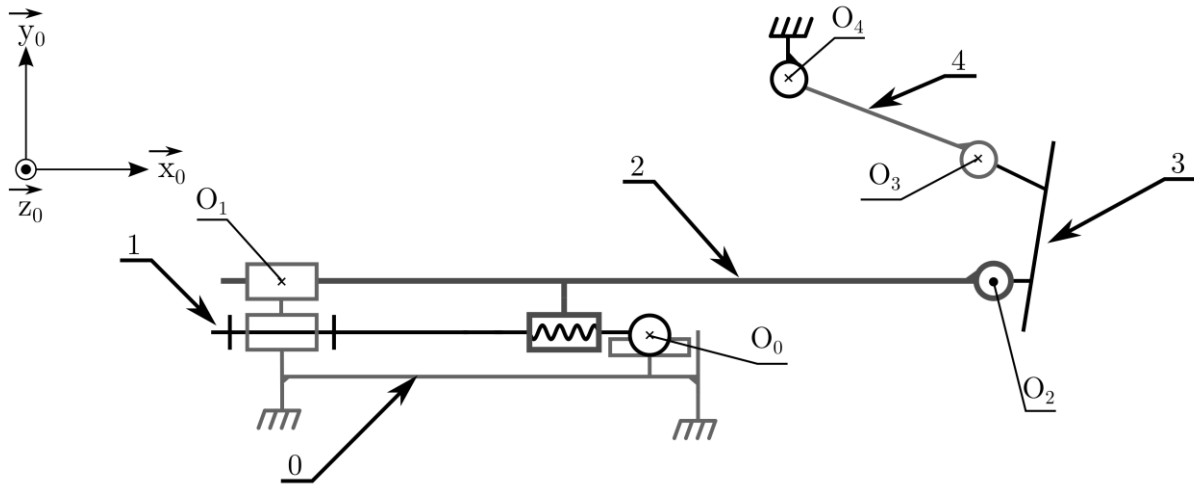
L'action mécanique élémentaire de la pression de l'air secondaire sur le volet est notée de la manière suivante :

$$d\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{l} d\vec{R}(air \rightarrow 3) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{(M)}$$

**Question 1.** Déterminer le torseur des actions mécaniques globales de l'air sur un volet 3 au point  $O_2$  exprimé dans la base  $B_3$ .



### c) Détermination du couple de torsion au niveau d'un flex-shaft



**Figure 4 :** Schéma cinématique du mécanisme d'ouverture de la nacelle lorsque les volets sont fermés.

Pour les questions suivantes, on utilisera le schéma cinématique donné sur la Figure 4, schéma basé sur la configuration de la partie basse de la Figure 2b.

On supposera pour la suite de l'étude que le torseur des actions mécaniques de l'air sur le volet sera modélisé par le torseur glisseur suivant :

$$\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(air \rightarrow 3) = F_{air} \vec{y}_3 \\ \vec{M}(O_2, air \rightarrow 3) = \frac{L_3}{2} \cdot F_{air} \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}$$

On modélise l'action mécanique extérieure appliquée par le flex-shaft sur la pièce **1** par un torseur couple tel que

$$\mathcal{T}_{flex-shaft \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_f \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{\forall M}$$

On notera  $K_{cc}$  est le rapport de la chaîne de cinématique entre  $\omega_b = \dot{\theta}_b$  et  $V_{20}(t)$  tel que :  $\omega_b = K_{cc} V_{20}$ . Ce rapport est issu de la linéarisation de la loi entrée/sortie obtenue par fermeture géométrique (non étudié ici).

La matrice d'inertie de la vis **1** exprimée en  $O_0$  dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  :  $I(O_0, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

On note  $M_2$ , la masse de l'ensemble mobile **2** comportant la partie mobile de la nacelle.

On note  $M_3$ , la masse d'un volet **3** et la matrice d'inertie d'un volet **3** en  $G_3$  exprimée dans la base  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  :

$$I(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

On suppose que la masse de la bielle **4** est négligeable.

On donne le graphe des liaisons du mécanisme modélisé figure 4 sur lequel ont été ajoutées les différentes actions mécaniques autres que celles transmissibles par les liaisons.

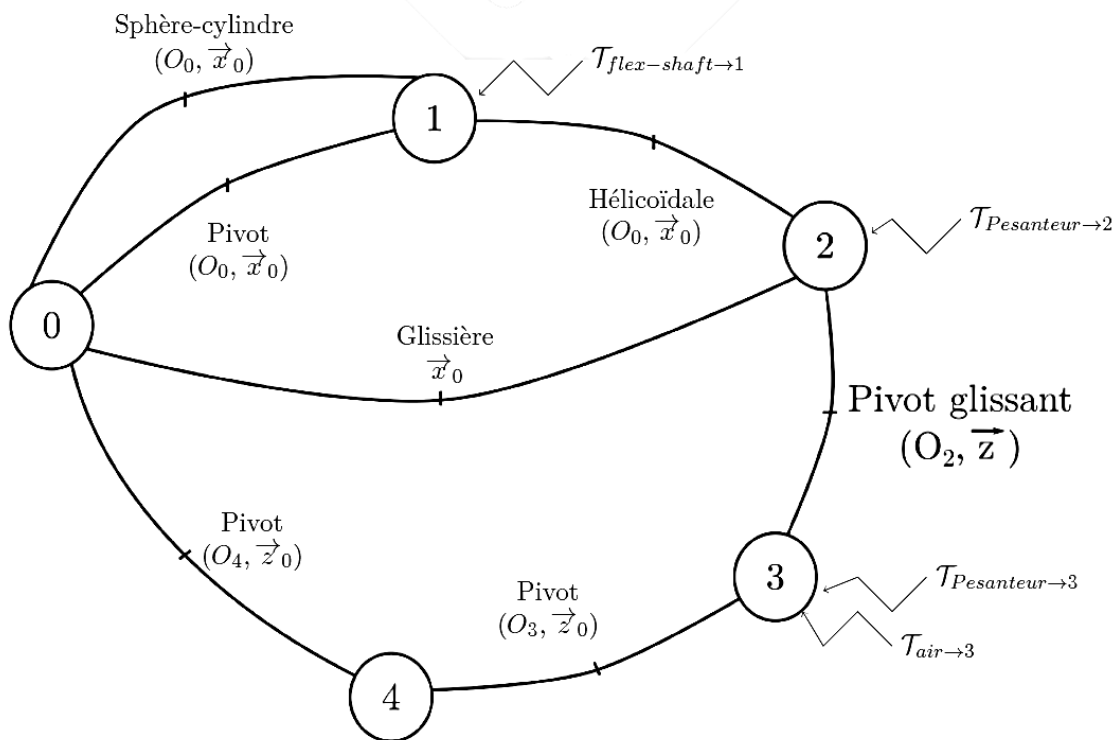


Figure 5 : Graphe des liaisons avec actions mécaniques extérieures

**Question 2.** Justifier la forme des matrices d'inertie  $I(O_0, 1)$  et  $I(G_3, 3)$ .

**Question 3.** Déterminer l'inertie équivalente, notée  $J_{eq}$ , de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4\}$  en mouvement par rapport à 0 (supposé galiléen) ramenée au niveau de l'axe de rotation de la pièce 1. Mettre cette inertie équivalente sous la forme  $A_{eq} + B_{eq} \cdot \sin(\theta_b)$ . Indiquer les expressions de  $A_{eq}$  et  $B_{eq}$ .

**Question 4.** En précisant le (ou les) solide(s) isolé(s) et en indiquant le théorème utilisé, justifier la relation ci-dessous entre le couple sur la vis 1 noté  $C_f$  et les actions mécaniques de l'air sur le volet 3.

$$J_{eq} \ddot{\theta}_f - B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{4 \pi} \cdot \dot{\theta}_f^2 = C_f + \frac{K_{cc} \cdot p \cdot M_3 \cdot g \cdot L_3}{4 \pi} \cdot \cos \theta_b + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \pi} \cdot \left( \sin \theta_b - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right)$$

# Annexe 1 - Décomposition des éléments du système eTras<sup>®</sup>

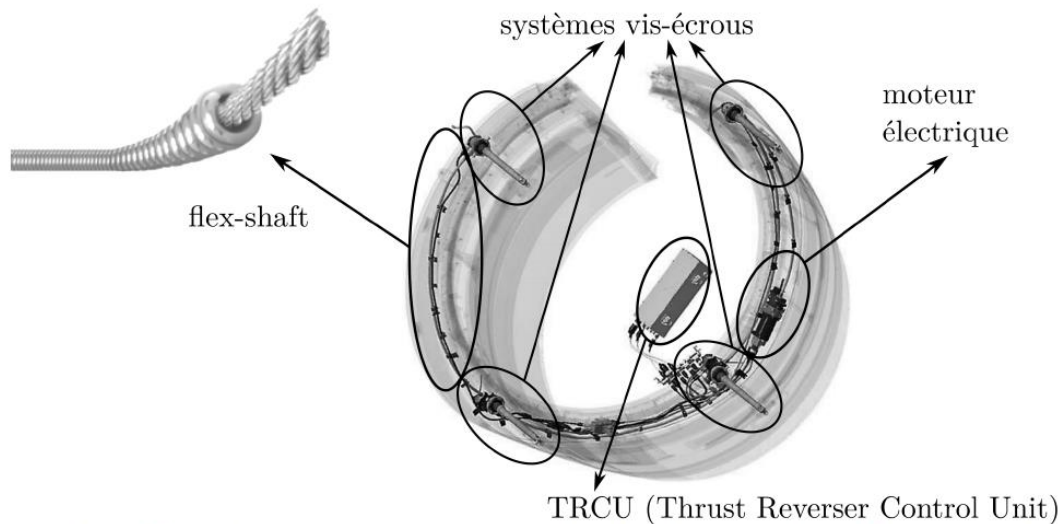


FIGURE 22 – Principaux constituants de la chaîne de puissance du eTras<sup>®</sup>.

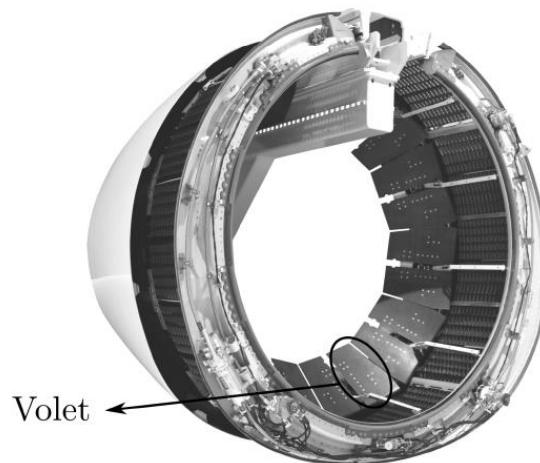


FIGURE 23 – Vue des volets dans la nacelle.

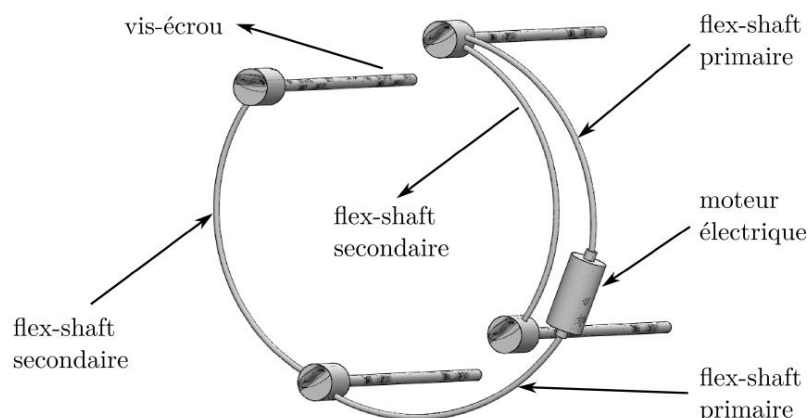


FIGURE 24 – Illustration de l'architecture des flex-shafts.

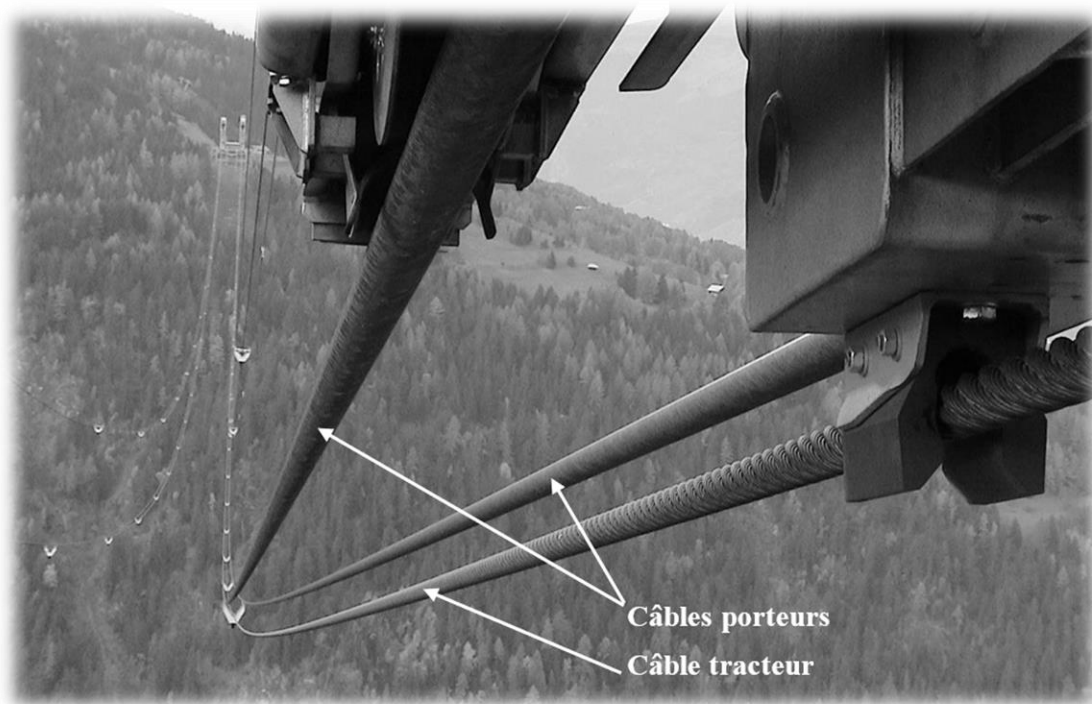
Comme le montre la Figure 24, le moteur électrique est raccordé aux flex-shafts primaires qui à leur tour sont raccordés en série via des renvois d'angle situés au niveau des premiers systèmes vis-écrou aux flex-shafts secondaires. Chaque système vis-écrou est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un ou deux flex-shafts et d'un renvoi d'angle.

### Problème N°3 : Téléphérique de la Vanoise

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs. C'est un téléphérique sans pylônes, d'une seule portée de gare à gare, ce qui permet de diminuer l'impact sur l'environnement et de préserver la beauté du paysage.

La solution retenue est constituée de deux lignes parallèles portant chacune une seule cabine. Contrairement à la plupart des téléphériques, les deux lignes sont entièrement indépendantes, ce qui signifie qu'une cabine n'est pas le contrepoids de l'autre. Ainsi, en cas de problème sur une cabine, la liaison entre les deux stations n'est pas interrompue.

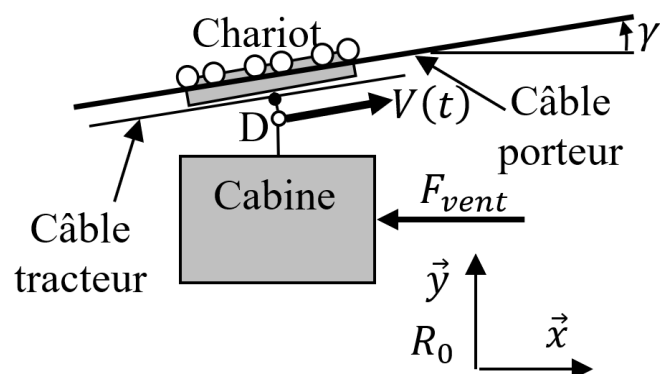
Le schéma de principe d'une ligne est donné en annexe. La capacité de chaque cabine est de 200 personnes. La puissance installée de  $1060\text{ kW}$  par cabine autorise un débit maximum de 1000 personnes à l'heure dans chaque sens et par cabine. Chaque ligne est composée principalement de deux câbles porteurs (rails) et d'un câble tracteur (voir photo suivante).



La particularité de ce téléphérique est que les deux gares reliées sont sensiblement à la même altitude ( $1630\text{ m}$  pour Les Arcs et  $1560\text{ m}$  pour La Plagne). Dans toute l'étude qui suit, on négligera cette différence d'altitude.

#### Hypothèses et données :

- soit  $R_0$ , un repère galiléen lié à la terre ;
- on donne  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ , accélération de la pesanteur ;
- soit (E), le système matériel constitué de tous les solides en mouvement et du câble tracteur ;
- on suppose que la cabine de masse  $M = 29\text{ tonnes}$  se déplace en translation à la vitesse  $V(t)$ , sur le câble incliné de  $\gamma$  par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre) ;
- la poulie motrice a pour moment d'inertie par rapport à son axe  $J_{pm} = 17000\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Son diamètre est  $D = 4\text{ m}$ . Sa vitesse de rotation est notée  $\omega(t)$  ;
- chacune des 5 poulies de déviation a pour moment d'inertie  $J_d = 10500\text{ kg} \cdot \text{m}^2$  et pour diamètre  $d = 3,8\text{ m}$  ;



- la masse totale du câble tracteur est  $m = 29 \text{ tonnes}$ . On suppose qu'il se déplace en translation à la vitesse  $V(t)$ . On néglige la puissance de la pesanteur sur le câble tracteur dans son mouvement par rapport à  $R_0$  ;
- on néglige la masse du chariot et de ses poulies de guidage ;
- la câble tracteur est guidé par 50 petites poulies de guidage dont les caractéristiques sont : moment d'inertie  $J_g = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , diamètre  $d_g = 0,5 \text{ m}$ . Trente deux de ces poulies sont montées sur des cavaliers accrochés aux câbles porteurs (voir annexe), les autres guident le câble en gare ;
- chaque moteur délivre la même puissance et a pour puissance maximum  $P_{m,maxi} = 530 \text{ kW}$ . Chaque moteur a pour moment d'inertie  $J_m = 11,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . On note  $\omega_m(t)$  la vitesse de rotation d'un moteur ;
- on néglige les inerties des réducteurs de rapport  $k = 1/20$  et de tous les solides non cités dans les hypothèses. La définition du rapport  $k$  est donnée annexe ;
- on suppose que toutes les liaisons pivot des solides du système matériel E avec le milieu extérieur sont sans frottement. Le frottement sera pris en compte globalement (voir hypothèses ci-dessous).

### A.Vérification du critère « Vitesse maximum de la cabine »

Objectif : modéliser le comportement dynamique de la cabine afin de respecter le critère de vitesse maximum de la cabine dans une pente de  $15^\circ$  avec un vent défavorable :  $V_{max} \geq V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

Lorsque la cabine approche de la gare de La Plagne, elle doit gravir une pente de  $\gamma = 15^\circ$ . Nous allons calculer la puissance  $P_m$  par moteur qui permet d'atteindre et donc de respecter le niveau du critère.

#### Hypothèses complémentaires pour le respect du critère ci-dessus :

- Chacun des deux moteurs délivre la puissance  $P_m$  ;
- La **vitesse de la cabine est constante** et égale à  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  ;
- La cabine gravit une pente de  $\gamma = 15^\circ$  ;
- L'action du vent est modélisée par une force horizontale, s'opposant au déplacement, d'intensité constante  $F_{vent} = 5000 \text{ N}$ . Cette force est un maximum obtenu uniquement par vent défavorable ;
- $f = 6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent de toutes les forces internes de frottement ramené sur l'axe du moteur. Ce coefficient de frottement donne un couple résistant « vu par le moteur » proportionnel à sa vitesse de rotation. Il est obtenu par mesure de la puissance électrique absorbée lors d'un essai à vide de l'installation.

**Q 1** – Justifier que la variation temporelle de l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à  $R_0$  est nulle :

**Q 2** – Donner l'expression de  $P(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ , la somme des puissances extérieures au système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_0$ .

**Q 3** – Donner l'expression de  $P_{int}$ , la somme des puissances intérieures au système matériel E.

**Q 4** – En appliquant le théorème de l'énergie-puissance à E, donner l'expression de la puissance  $P_m$  délivrée par chaque moteur en fonction de  $k$ ,  $V_0$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $f$ ,  $\gamma$  et  $F_{vent}$ .

**Q 5** – Faire l'application numérique de  $P_m$ . Les moteurs choisis ont une puissance maximum  $P_{m,maxi} = 530 \text{ kW}$ . Permettent-ils de respecter le niveau du critère « **Vitesse maximum de la cabine** dans une pente à  $15^\circ$  avec un vent défavorable » ?



**B. Vérification du critère « Durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine »**

Objectif : modéliser le comportement dynamique de la cabine afin de respecter le critère de durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine lancée à  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  dans une descente à  $10^\circ$  sans vent :  $t_a = 10 \text{ s}$ .

Dans une descente, ce sont les moteurs à courant continu qui retiennent la cabine. Mais en cas de coupure d'électricité, les moteurs ne seraient plus contrôlés, et les cabines pourraient atteindre une vitesse trop élevée.

**Q 6** – Calculer en fonction de  $\omega_m(t)$  l'expression littérale de l'énergie cinétique de chaque élément du système matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_0$ . En déduire l'expression littérale du moment d'inertie équivalent  $J$  de tout le système matériel ( $E$ ) ramené sur l'axe des moteurs.

Hypothèses et données complémentaires pour cette question :

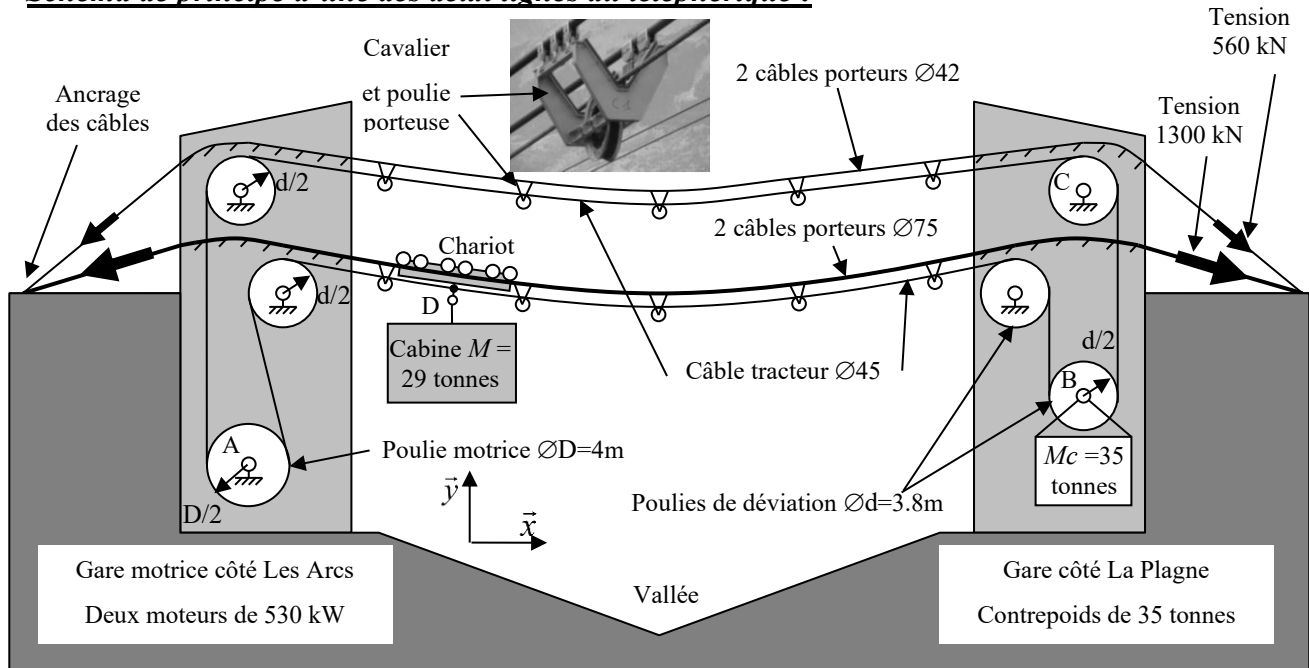
- on donne  $J = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , le moment d'inertie de tout le système matériel ( $E$ ), ramené sur l'axe des moteurs ;
- on ne tient pas compte de l'action du vent  $F_{vent}$  ;
- par souci de simplifications, on néglige le frottement visqueux équivalent de toutes les forces internes de frottement ramené sur l'axe du moteur (coefficient  $f$ ) ;
- la cabine sort de la gare des Arcs, et descend une pente  $\gamma' = -10^\circ$  à la vitesse  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  ;
- on donne  $C_f = 300000 \text{ N} \cdot \text{m}$ , le couple de freinage du frein de service ;
- le freinage électrique (frein moteur) n'est pas utilisé. Les moteurs ne sont donc pas alimentés.

**Q 7** – Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système matériel ( $E$ ) dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_0$ . Déterminer l'expression de  $\dot{\omega}_m(t)$ , la dérivée temporelle de  $\omega_m(t)$ . Donner l'expression de la décélération notée  $a$  de la cabine en fonction de  $k$ ,  $D$  et  $\dot{\omega}_m(t)$ . Donnez en fonction de  $a$  et de  $V_0$  l'expression de la durée  $\tau$  du freinage.

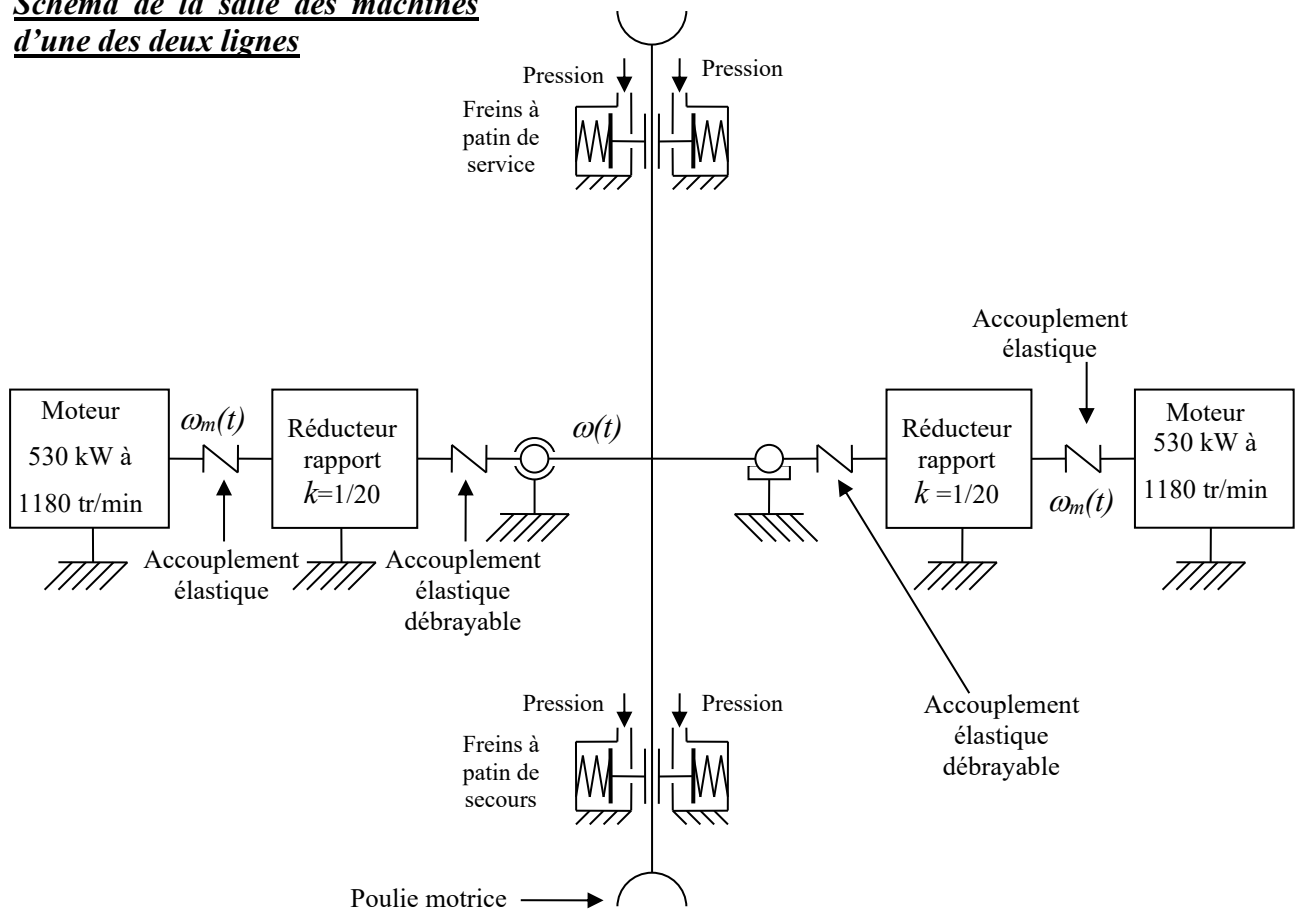
**Q 8** – Faire l'application numérique de  $\tau$ . Vérifiez le critère « Durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine lancée à  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  dans une descente à  $10^\circ$  sans vent ».

## Annexe

### Schéma de principe d'une des deux lignes du téléphérique :



### Schéma de la salle des machines d'une des deux lignes



**Définition de  $k$  :**  $k = \frac{\omega(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{20}$