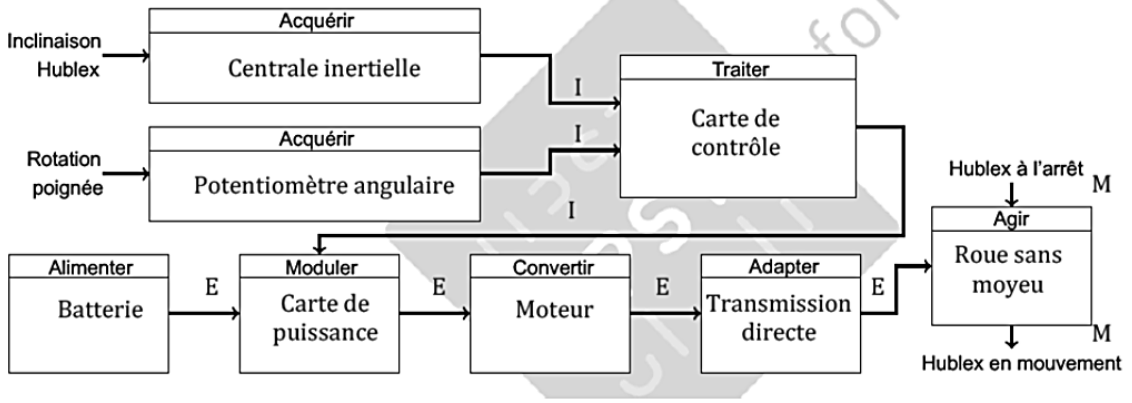
Problème N°1 : Gyropode à usage professionnel Hublex

Q1 :

Par lecture de l'ibd, Figure 5, on obtient :



Q2 : On s'intéresse à une trajectoire par rapport au sol de type circulaire, de centre O_0 et de rayon de courbure r_c, la vitesse est proportionnelle au rayon et à la vitesse angulaire associée : $\boxed{V = r_c.\omega_{10}}$

Q3 : Par composition des vitesses, et roulement sans glissement au point I entre 2 et 0, nous avons :

$$\vec{V}(I,2/0) = \vec{V}(I,2/1) + \vec{V}(I,1/0) = \vec{0}$$

Par le champ des vitesses :

$\vec{V}(I,2/1) = \overrightarrow{IO_1} \wedge \vec{\Omega}(2/1) = (R.\vec{z_1} + \frac{L}{2}.\vec{x_1}) \wedge \omega_{21}.\vec{x_1}$ car $O_1 \in (A,\vec{x_1})$, axe de la pivot 2/1.

De la même manière : $\vec{V}(I,1/0) = \overrightarrow{IO_0} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = -(r_c - \frac{L}{2}).\vec{x_1} \wedge \omega_{10}.\vec{z_1}$ car O_0 est le Centre Instantané de Rotation du mouvement 1/0.

Ainsi : $\boxed{R.\omega_{21} + V - \frac{L}{2}.\omega_{10} = 0}$

Q4 : Le rapport de transmission $k = 0{,}092$ est donc tel que : $\omega_{21} = k.\omega_{41}$ (le galet est plus petit que la roue, cf. fig.4, il s'agit -comme attendu- d'un réducteur). Par substitution, on obtient : $\boxed{\omega_{41} = \frac{L.\omega_{10} - 2.V}{2.R.k}}$

Q5 : Pour le côté droit, on remarque que : $\overrightarrow{JO_0} = -(r_c + \frac{L}{2}).\vec{x_1}$ donc : $\boxed{\omega_{51} = \frac{-L.\omega_{10} - 2.V}{2.R.k}}$

Q6 : On utilise un potentiomètre ayant 360° d'amplitude et fournissant une image de la position angulaire sous forme d'un mot de 10 $bits$ soit donc $2^{10} = 1024$ combinaisons.

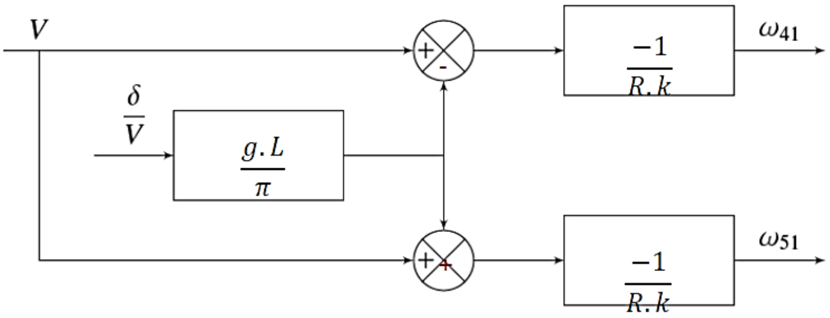
La résolution angulaire est donc : $\boxed{résolution = \frac{360}{2^{10}} = 0{,}35°}$

Q7 : Le capteur est utilisé uniquement entre les angles $-45°$ et $+45°$, soit un quart de tour. Il y a donc 256 positions effectivement mesurables.

La plage des valeurs est $\boxed{-45° \leq 0 \leq +45°}$ ou encore, en supposant un codage binaire en complément à 2 : $\boxed{(1000\ 0000)_2 = (-128)_{10} \leq (0000\ 0000)_2 \leq (0111\ 1111)_2 = (127)_{10}}$

Q8 : L'accélération centrifuge est : $a_f = \frac{V^2}{r_c}$ et question 2, nous avons posé : $V = r_c.\omega_{10}$. Par substitution, nous avons : $\boxed{a_f = V.\omega_{10}}$. L'exigence«1.4.3» impose que l'accélération centrifuge soit limitée à $a_{fmax} = 0{,}5.g$, l'exigence«1.4.2» impose que la vitesse est limitée à $V_{max} = 10\ km.h^{-1}$ donc $\boxed{\omega_{10max} = \frac{a_{fmax}}{V_{max}} = 1{,}77\ rad/s}$.

Q9 :



Q10 : On peut, ici, proposer d'évaluer les hypothèses faites pour arriver à la forme diagonale donnée dans le sujet :

- On peut supposer que la position de l'avant-bras de l'utilisateur (qui sert au pilotage) influe peu sur la <u>symétrie matérielle</u> de l'ensemble S' par rapport au <u>plan</u> $\boxed{(G_{S'}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})}$ ou que l'utilisateur est dans la position du second usager visible sur la figure 1 (il pilote avec les deux mains sur la poignée et ses deux avant-bras sont donc pliés symétriquement).
- On peut supposer que la morphologie de l'usager (fesses, poitrine, ventre) n'a pas, non plus, d'influence notable sur la <u>symétrie matérielle</u> de l'ensemble S' par rapport au <u>plan</u> $\boxed{(G_{S'}, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{z_S})}$.

Q11 : $S' = \{Chassis\ 1 + Pilote\}$, est <u>assimilé à un solide</u> indéformable de centre d'inertie $G_{S'}$, donc :

$$\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0) = [I(G_{S'}, S')].\vec{\Omega}(1/0) = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})} . \begin{bmatrix} -\omega_{10}.sin\alpha \\ 0 \\ \omega_{10}.cos\alpha \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})} \quad \text{car } \overrightarrow{z_{1'}} = -sin\alpha.\overrightarrow{x_S} + cos\alpha.\overrightarrow{z_S}$$

donc : $\boxed{\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0) = -A_S.\omega_{10}.sin\alpha.\overrightarrow{x_S} + C_S.\omega_{10}.cos\alpha.\overrightarrow{z_S}}$

Q12 : <u>Au centre d'inertie</u> $G_{S'}$, nous avons donc : $\vec{\delta}(G_{S'}, S'/R_0) = \left[\frac{d\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$, avec ω_{10} et α des constantes.

Par la formule de changement de base de dérivation :

$$\left[\frac{d\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0)}{dt}\right]_{R_0} = \underbrace{\left[\frac{d\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0)}{dt}\right]_{R_{S'}}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega}(R_{S'}/R_0) \wedge \vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0) \text{ avec } \vec{\Omega}(R_{S'}/R_0) = \omega_{10}.(-sin\alpha.\overrightarrow{x_S} + cos\alpha.\overrightarrow{z_S})$$

Ainsi : $\boxed{\vec{\delta}(G_{S'}, S'/R_0) = (C_S - A_S).\omega_{10}^2.sin\alpha.cos\alpha.\overrightarrow{y_S}}$

On remarque que $S = \{S' + Roues\}$, par linéarité on a : $\vec{\delta}(G_{S'}, S/R_0) = \vec{\delta}(G_{S'}, S'/R_0) + \vec{\delta}(G_{S'}, Roues/R_0)$ or, dans cette partie, la masse et les composantes de la matrice d'inertie des roues sont négligées, donc, nous avons : $\boxed{\vec{\delta}(G_{S'}, S/R_0) = (C_S - A_S).\omega_{10}^2.sin\alpha.cos\alpha.\overrightarrow{y_S}}$

Q13 : O_0 est l'origine de R_0 et G_S un point fixe de S, donc :

$\vec{V}(G_S, S/R_0) = \vec{V}(G_S/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_0G_S}}{dt}\right]_{R_0}$ avec $\overrightarrow{O_0G_S} = r_c.\overrightarrow{x_{1'}} + h_S.\overrightarrow{z_S}$. Supposons h_S constante.

$\left[\frac{d\overrightarrow{x_{1'}}}{dt}\right]_{R_0} = \omega_{10}.\overrightarrow{y_{1'}}$ (cas de rotation simple) et $\overrightarrow{z_S} = sin\alpha.\overrightarrow{x_{1'}} + cos\alpha.\overrightarrow{z_0}$, soit $\left[\frac{d\overrightarrow{z_S}}{dt}\right]_{R_0} = sin\alpha.\omega_{10}.\overrightarrow{y_{1'}}$.

La vitesse recherchée est donc : $\boxed{\vec{V}(G_S, S/R_0) = (r_c + h_S.sin\alpha).\omega_{10}.\overrightarrow{y_{1'}}}$

Q14 : On isole $S = \{Chassis\ 1 + Pilote + Roues\}$.

Le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures est : Le poids (centre d'inertie G_S) et les actions du sol en I et J. La projection du moment sera : $\vec{M}(J,\bar{S} \to S).\overrightarrow{y_{1'}} = \vec{M}(J,g \to S).\overrightarrow{y_{1'}} + \vec{M}(J,0^I \to S).\overrightarrow{y_{1'}} + \underbrace{\vec{M}(J,0^J \to S)}_{\vec{0}}.\overrightarrow{y_{1'}}$.

Par le champ de moment :

$\vec{M}(J,g \to S).\overrightarrow{y_{1'}} = \underbrace{\vec{M}(G_S,g \to S)}_{\vec{0}}.\overrightarrow{y_{1'}} + [\overrightarrow{JG_S} \wedge -m_S.g.\overrightarrow{z_0}].\overrightarrow{y_{1'}} = [-m_S.g.\overrightarrow{z_{1'}} \wedge \overrightarrow{y_{1'}}].\overrightarrow{JG_S}$ avec $\overrightarrow{JG_S} = -\frac{L}{2}.\overrightarrow{x_S} + h_S.\overrightarrow{z_S}$ et $\overrightarrow{x_{1'}} = cos\alpha.\overrightarrow{x_S} + sin\alpha.\overrightarrow{z_S}$. Soit : $\vec{M}(J,g \to S).\overrightarrow{y_{1'}} = m_S.g.\left[-\frac{L}{2}.cos\alpha + h_S.sin\alpha\right]$

Par le champ de moment :

$$\vec{M}(J,0^I \to S).\overrightarrow{y_{1'}} = [\overrightarrow{JI} \wedge (T_I.\overrightarrow{x_S} + N_I.\overrightarrow{z_S})].\overrightarrow{y_{1'}} = [-L.\overrightarrow{x_S} \wedge (T_I.\overrightarrow{x_S} + N_I.\overrightarrow{z_S})].\overrightarrow{y_{1'}} = L.N_I$$

Finalement : $\boxed{\vec{M}(J,\bar{S} \to S).\overrightarrow{y_{1'}} = L.N_I + m_S.g.\left[h_S.sin\alpha - \frac{L}{2}.cos\alpha\right]}$

Q15 : On isole $S = \{Chassis\ 1 + Pilote + Roues\}$. Le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures est : Le poids (centre d'inertie G_S) et les actions du sol en I et J.

On applique le Théorème du Moment Dynamique au point J projeté sur $\overrightarrow{y_{1'}}$:

$$\vec{M}(J,\bar{S} \to S).\overrightarrow{y_{1'}} = \vec{\delta}(J,S/R_0).\overrightarrow{y_{1'}}$$

$$\boxed{L.N_I + m_S.g.\left[h_S.sin\alpha - \frac{L}{2}.cos\alpha\right] = {\omega_{10}}^2.\left[cos\alpha.sin\alpha.(C_S - A_S) - m_S.(r_c + h_S.sin\alpha).\left(\frac{L}{2}.sin\alpha + h_{S'}.cos\alpha\right)\right]}$$

Q16 : N_I représente la composante normale de la résultante $\vec{R}^{I}_{0\to S}$. Sachant que 0, le sol, est situé sous S, on aura donc basculement si $\boxed{N_I \leq 0\ \text{N}}$. La vitesse limite ω_{10lim} conduit au basculement pour $\boxed{N_I = 0\ \text{N}}$, donc :

$$\boxed{\omega_{10lim} = \sqrt{\frac{m_S.g.\left[h_S.sin\alpha - \frac{L}{2}.cos\alpha\right]}{\left[cos\alpha.sin\alpha.(C_S - A_S) - m_S.(r_c + h_S.sin\alpha).\left(\frac{L}{2}.sin\alpha + h_{S'}.cos\alpha\right)\right]}}.}$$

Q17 : Figure 10 gauche, α est représenté positif. Ici, $\boxed{\alpha = -7°}$ on va donc basculer autour du point I. Dans les conditions proposées, on remarque que N_J change de signe pour $\boxed{v_{lim} = 1{,}5\ m.s^{-1} = 5{,}4\ km.h^{-1}}$.

L'exigence id 1.5.3 indique que pour un rayon de braquage de 5 m associé à une vitesse de $\boxed{5\ km.h^{-1} < v_{lim}}$ sur sol incliné, l'exigence est respectée. Il faudra toutefois veiller à ne pas pouvoir atteindre la vitesse de 10 $km.h^{-1}$(exigence id 1.4.2) sur sol incliné.

Q18 : La courbe représentative de N_J (une AM de contact) ne peut en aucun cas prendre des valeurs négatives. A partir de $v_{lim} = 1{,}5\ m.s^{-1}$, on aura donc $\boxed{N_J = 0\ N}$.

Au-delà de v_{lim}, il est nécessaire de dissocier l'angle α_{sol} d'inclinaison du sol (qui peut éventuellement être considéré constant) de l'angle α d'inclinaison de l'ensemble S qui ne sera plus constant puisque l'ensemble bascule par rapport à R_0.

Q19 : Afin de déterminer l'équation (3), on utilise les hypothèses suivantes : avancée en ligne droite, sur sol plat.

On isole $S' = \{Chassis\ 1 + Pilote\}$.

Le BAME est : pesanteur sur S', roue gauche sur 1, roue droite sur 1.

On applique le Théorème du Moment Dynamique à S', au point O_1, projeté sur $\overrightarrow{x_0}$.

<u>Remarque :</u> *on gardera donc le résultat proposé par le sujet.*

Q20 : On isole $S = \{Chassis\ 1 + Pilote + Roues\}$.

Le Bilan des Actions Mécaniques Extérieures est : Le poids (centre d'inertie G_S) et les actions du sol en I et J.

Les <u>frottements</u> externes et internes sont traités <u>à part</u>. Les Actions Mécaniques Intérieures sont : issues des liaisons que l'on suppose parfaites, les actions de chaque moteur sur sa roue associée.

On considère que $\beta = cste$ et que le sol est plat, donc <u>le poids ne travaille pas</u> : $P(g \to S/0) = 0\ W$.

Les <u>contacts avec le sol peuvent être considérés parfaits</u> puisque les frottements sont traités à part : $P(sol \to S/0) = 0\ W$

Les différents frottements sont <u>ramenés sur l'axe</u> de rotation des roues et modélisés par un couple résistant, C_f, <u>appliqué à chaque roue</u> . Il s'agit des frottements internes prenant en compte les frottements aux liaisons pivots et du frottement (de roulement) dans le contact galet /roue.

$$2 * P(1(frottements) \to Roue/1) = 2\{\tau_{frottements \to Roue}\} \otimes \{\mathcal{V}_{(Roue/1)}\} = 2 \ {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -C_f.\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix} \otimes {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \omega_{R1}.\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = -2.C_f.\omega_{R1}$$

L'action mécanique du moteur sur chaque roue, réalisée par l'intermédiaire du galet, développe la puissance des actions mutuelles :

$$P(1(\text{moteur}) \leftrightarrow Roue) = P(1(\text{moteur}) \to Roue/1) = {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dfrac{C_m}{k}.\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix} \otimes {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \omega_{R1}.\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \frac{C_m}{k}.\omega_{R1}$$

Ainsi, nous obtenons : $\boxed{P_{ext} + P_{int} = 2.\left(\frac{C_m}{k} - C_f\right).\omega_{R1}}$

Q21 : Par linéarité de l'intégrale de masse : $E_C(S/R_0) = E_C(S'/R_0) + 2.E_C(Roue/R_0)$

On néglige l'inertie du galet d'entraînement et du rotor du moteur, ainsi S' est considéré en translation rectiligne donc : $E_C(S'/R_0) = \frac{1}{2}.m_{S'}.V^2$

Et $E_C(Roue/R_0) = \frac{1}{2}.\{C_{Roue/0}\} \otimes \{\mathcal{V}_{Roue/0}\}$. <u>Au centre d'inertie</u> O_1 de la roue, nous avons donc :

$$\vec{\sigma}(O_1, Roue/R_0) = \begin{bmatrix} J_R & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},-,-)} . \begin{bmatrix} \omega_{R1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_0},-,-)} = J_R.\omega_{R1}.\overrightarrow{x_0}$$

$$E_C(Roue/R_0) = \frac{1}{2}. {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \dfrac{m_S - m_{S'}}{2}.V.\overrightarrow{y_0} \\ J_R.\omega_{R1}.\overrightarrow{x_0} \end{Bmatrix} \otimes {}_{O_1}\begin{Bmatrix} \omega_{R1}.\overrightarrow{x_0} \\ V.\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}.\left(\frac{m_S - m_{S'}}{2}.V^2 + J_R.\omega_{R1}^2\right)$$

Ainsi : $E_C(S/R_0) = \frac{1}{2}.m_S.V^2 + J_R.\omega_{R1}^2$, or on rappelle que $V = -R.\omega_{R1}$, donc : $\boxed{E_C(S/R_0) = \left(\frac{m_S}{2}.R^2 + J_R\right).\omega_{R1}^2}$

Q22 : On isole $S = \{Chassis\ 1 + Pilote + Roues\}$. Les actions mécaniques ont été identifiées question 20.

On applique le <u>théorème de l'énergie puissance au groupe de solides S</u> :

$P_{ext} + P_{int} = \frac{d}{dt}E_C(S/R_0)$ soit : $2.\left(\frac{C_m}{k} - C_f\right).\omega_{R1} = 2.\left(\frac{m_S}{2}.R^2 + J_R\right).\dot{\omega}_{R1}.\omega_{R1}$

Le couple moteur est donc : $\boxed{C_m = k.\left[\left(\frac{m_S}{2}.R^2 + J_R\right).\dot{\omega}_{R1} + C_f\right]}$

Q23 : On suppose que le couple résistant C_f est négligeable.

L'équation de la réponse 22 devient : $C_m = k.\left(\frac{m_S}{2}.R^2 + J_R\right).\dot{\omega}_{R1}$ et l'équation 3 est :

$C_m = k.z_{G_{S'}}.m_{S'}.(\dot{V}.cos\beta + g.sin\beta)$ et le sujet rappelle que $V = -R.\omega_{R1}$ soit $\dot{V} = -R.\dot{\omega}_{R1}$

En égalisant les deux formes, nous obtenons : $-\left(\frac{m_S}{2}.R^2 + J_R\right).\frac{\dot{V}}{R} = z_{G_{S'}}.m_{S'}.\dot{V}.cos\beta + z_{G_{S'}}.m_{S'}.g.sin\beta$

$$\Leftrightarrow -z_{G_{S'}}.m_{S'}.g.sin\beta = \left(z_{G_{S'}}.m_{S'}.cos\beta + \frac{m_S}{2}.R + \frac{J_R}{R}\right).\dot{V}$$

Après mise en forme : $\boxed{\dot{V} = \frac{-z_{G_{S'}}.m_{S'}.g.sin\beta}{z_{G_{S'}}.m_{S'}.cos\beta + \frac{m_S}{2}.R + \frac{J_R}{R}}}$

Q24 : La relation déterminée réponse 23, $\dot{V} = \frac{-z_{G_{S'}}.m_{S'}.g.sin\beta}{z_{G_{S'}}.m_{S'}.cos\beta + \frac{m_S}{2}.R + \frac{J_R}{R}}$ implique qu'une variation de l'angle β entraîne une variation de $\dot{V}$ qui est l'accélération $\vec{a}(O_1, S'/R_0)$.

Ainsi, si l'on utilise l'angle β comme consigne, alors celle-ci pourra être assimilée à une consigne d'accélération. L'exigence Id 1.1.4.1 est respectée.

Pour avancer à vitesse constante, on doit avoir $\dot{V} = 0\,m.s^{-2}$, soit $\underbrace{z_{G_{S'}}.m_{S'}.g}_{\neq 0}.sin\beta = 0$ soit $\boxed{\beta = 0}$ seul angle physiquement réaliste.

Problème N°2 : Téléphérique de la Vanoise

Q 1 : On est en régime permanent $V(t) = V_0$. Les vitesses de rotation de tous les éléments tournants sont cstes : donc $\frac{dE_c(E/R_0)}{dt} = 0$

Q 2 : $P(ext \to E/R_0) = 2P_m - F_{vent}V_0 \cos\gamma - MgV_0 \sin\gamma$

Q 3 : $P_{int} = C_{frott}.\omega = -f\omega_m.\omega_m = -f\omega_m^2$

Q 4 : $P_m = \frac{1}{2}\left(F_{vent}V_0 \cos\gamma + MgV_0 \sin\gamma + f\left(\frac{2V_0}{kD}\right)^2\right)$

Q 5 : $P_m = 514\,kW < 530$ kW

Q 6 : $E_c(E/R_0) = 2 \times \frac{1}{2}J_m(\omega_m)^2 + \frac{1}{2}J_{pm}(k\omega_m)^2 + 5 \times \frac{1}{2}J_d\left(k\frac{D}{d}\omega_m\right)^2 + 50 \times \frac{1}{2}J_g\left(k\frac{D}{d_g}\omega_m\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{Dk}{2}\omega_m\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{Dk}{2}\omega_m\right)^2$

Ce qui donne : $J = 2J_m + k^2J_{pm} + 5J_d\left(k\frac{D}{d}\right)^2 + 50J_g\left(k\frac{D}{d_g}\right)^2 + m\left(\frac{Dk}{2}\right)^2 + M\left(\frac{Dk}{2}\right)^2$

Q 7 : $P_{int} = 0$ et $P(ext \to E/R_0) = -kC_f\omega_m - MgV_0 \sin\gamma$

D'où : $\dot{\omega}_m = \frac{1}{J}\left(-kC_f - Mg\frac{Dk}{2}\sin\gamma\right)$

Q 8 : $a = \frac{Dk}{2}\dot{\omega}_m = -\frac{V_0}{\tau} \Rightarrow \tau = 9{,}54\,s$