Problème N°1 : Exosquelette lombaire

Q1 : Les 2 courbes de la figure 3 permettent de faire les observations suivantes :
Disque L3-L4

- diminution de la pression intra-discale de 0,53 MPa à 0,22 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 0 N à 65 N;
- augmentation de la pression intra-discale de 0,22 MPa à 0,25 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 65 N à 100 N.

Disque L4-L5

- diminution de la pression intra-discale de 0,48 MPa à 0,2 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 0 N à 65 N;
- augmentation de la pression intra-discale de 0,2 MPa à 0,24 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 65 N à 100 N.

On peut se demander pourquoi le constructeur n'a pas plutôt choisi un effort de 65 N environ par actionneur. Le choix des 40 N est sans doute motivé par la littérature scientifique et par le fait que trop diminuer la pression intra-discale risque de réduire le volume musculaire de l'utilisateur (trop d'assistance implique une dé-musculation souvent). Aussi on remarque qu'à partir de 40N, les contraintes lombaires restent plus faibles globalement et il est peut-être plus facile de fournir 40N que 65N.

Q2 : On va calculer "à la main" la valeur moyenne de pression entre 0,5 min et 2 min. Alors :
capteur avant : entre $t = 0,5$ min et $t = 1,2$ min la courbe est linéaire et la valeur moyenne est son point milieu, soit à $t = 0,85$ min à la pression normalisée 0,79. Entre $t = 1,2$ min et $t = 2$ min la valeur de pression est constante à 0,78. La pression moyenne normalisée vaut alors
$((1,2 - 0,5).0,79 + (2 - 1,2).0,78)/(2 - 0,5) \approx 0,785$ soit une diminution de pression de 21,5% .
capteur milieu : avec le même raisonnement sur les mêmes intervalles de temps la pression moyenne normalisée vaut $((1,2 - 0,5).0,71 + (2 - 1,2).0,74)/(2 - 0,5) \approx 0,726$ soit une diminution de pression de 27,4% .
capteur arrière : avec le même raisonnement sur les mêmes intervalles de temps la pression moyenne normalisée vaut $((1,2 - 0,5).0,54 + (2 - 1,2).0,52)/(2 - 0,5) \approx 0,53$ soit une diminution de pression de 47% .

Q3 : Par fermeture géométrique

$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow a\,\overrightarrow{x} + l_2(t)\,\overrightarrow{y}_2 - b\,\overrightarrow{x}_3 - h(t)\,\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$

Par méthode du carré scalaire

$$\boxed{l_2(t) = \sqrt{a^2 + b^2 + h(t)^2 - 2a \cdot b\cos[\varphi(t)] + 2b \cdot h(t)\sin[\varphi(t)]}}$$

Q4 :

Le vérin réalise une course complète entre $t = 0$ et $t = T$, donc :

- $l_2(t=0) = \sqrt{a^2 + b^2 + h_0^2 - 2a \cdot b\cos[\varphi(0)] + 2b \cdot h_0 \sin[\varphi(0)]}$. Or cette valeur est minimisée pour $\varphi(0) = 0$, donc $\boxed{l_2(t=0) = 111,8\text{mm}}$;
- $l_2(t=T) = \sqrt{a^2 + b^2 + (h_0 + \Delta h)^2 - 2a \cdot b\cos[\varphi(T)] + 2b \cdot (h_0 + \Delta h)\sin[\varphi(T)]}$. Or cette valeur est maximisée pour $\varphi(T) = 20°$, donc $\boxed{l_2(t=T) = 205,4\text{mm}}$.

La course du vérin vaut donc $\boxed{\Delta l_2 = l_2(t=T) - l_2(t=0) = 93,6\text{mm}}$.

Q5 :

On isole le solide (4), il est soumis à :

- l'action mécanique transmise par la liaison glissière entre 3 et 4 d'axe $\overrightarrow{y}_0$;
- l'action du capteur $\overrightarrow{F}_{\text{cap}\to 4}$;
- l'effort de rappel du ressort $-K_{\text{res}}y(t)\overrightarrow{y}_0$.

Le Théorème de la Résultante Statique (solide (4) immobile) projetée selon $\overrightarrow{y}_0$ donne :

$$\boxed{0 = \overrightarrow{F}_{\text{cap}\to 4}\cdot\overrightarrow{y}_0 - K_{\text{res}}y(t)}$$

Q6 :

On a un système pignon + roue dentée à axes fixes, donc : $\boxed{\dfrac{\omega_{1/3}}{\omega_{2/3}} = -\dfrac{Z_2}{Z_1} = -1}$.

Par composition des vitesses : $\overrightarrow{V}_{J,3/R_0} = \overrightarrow{V}_{J,3/2} + \overrightarrow{V}_{J,2/R_0}$, or $\overrightarrow{V}_{J,3/2} = \overrightarrow{0}$ car J est situé sur l'axe de rotation de la liaison pivot entre (3) et (2). De plus $\overrightarrow{V}_{J,2/R_0} = \dfrac{pas}{2\pi}\omega_{2/R_0}\overrightarrow{y}_0$.

Encore par composition des vitesses $\omega_{2/R_0} = \omega_{2/3} + \omega_{3/R_0}$ et $\omega_{3/R_0} = 0$ par la liaison glissière entre (3) et (0). De plus $\omega_{2/3} = -\omega_{1/3} = -\lambda\omega_m(t)$.

Pour conclure $\boxed{\overrightarrow{V}_{J,3/R_0} = -\dfrac{pas}{2\pi}\lambda\omega_m(t)\overrightarrow{y}_0}$.

Q7 :

- $E_c(\text{arbre moteur}/R_0) = \dfrac{1}{2}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{0}\\ I_m\omega_m(t)\overrightarrow{y}_0\end{Bmatrix}_J \otimes \begin{Bmatrix}\omega_m(t)\overrightarrow{y}_0\\ \overrightarrow{V}_{J,\text{arbre moteur}/R_0}\end{Bmatrix}_J = \dfrac{1}{2}I_m\omega_m(t)^2$ car la masse de l'arbre est négligée ;
- $E_c(1/R_0) = \dfrac{1}{2}I_r\omega_r(t)^2 = \dfrac{1}{2}\left(I_r\lambda^2\right)\omega_m(t)^2$ car la masse de (1) est négligée ;
- $E_c(2/R_0) = \dfrac{1}{2}I_V\omega_{2/R_0}^2 = \dfrac{1}{2}\left(I_V\lambda^2\right)\omega_m(t)^2$ car la masse de (2) est négligée ;
- $E_c(3/R_0) = \dfrac{1}{2}m_3\overrightarrow{V}^2_{J,3/R_0} = \dfrac{1}{2}\left(m_3\left[\dfrac{pas}{2\pi}\lambda\right]^2\right)\omega_m(t)^2$ car le solide est en translation.

Q8 :

Par additivité de l'énergie cinétique :

$$E_c(\Sigma/R_0) = E_c(0/R_0) + E_c(\text{arbre moteur}/R_0) + E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0) + E_c(\text{ressort}/R_0) + E_c(4/R_0)$$

Or $E_c(\text{ressort}/R_0) = 0$ car la masse du ressort est négligée et $E_c(4/R_0) = E_c(0/R_0) = 0$ car les solides (0) et (4) sont statiques. Par conséquent :

$$\boxed{E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}\left(I_m + I_r\lambda^2 + I_V\lambda^2 + m_3\left[\frac{pas}{2\pi}\lambda\right]^2\right)\omega_m(t)^2}$$

On identifie $\boxed{I_{eq} = I_m + I_r\lambda^2 + I_V\lambda^2 + m_3\left[\dfrac{pas}{2\pi}\lambda\right]^2}$.

Q9 :

On isole Σ, les puissances extérieures qui s'exercent sur ce système sont :

- $P_{\text{châssis}\to 4/R_0} = \left\{\mathcal{T}_{\text{châssis}\to 4}\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}_{4/R_0}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F}_{\text{cap}\to 4} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_K \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_K = 0$ car le solide (4) est statique ;
- $P_{\text{châssis}\to 0/R_0} = 0$ car (0) est statique ;
- puissance développée par la pesanteur : $P_{\text{pes}\to 3/R_0} = P_{\text{pes}\to 4/R_0} = 0$ car (4) est statique et (3) est en translation selon $\overrightarrow{y}_0$ alors que la pesanteur est dirigée orthogonalement. Les autres solides ont une masse négligée et ne développent pas de puissance dûe à la pesanteur.

Finalement le total de la puissance extérieure à Σ est nul.

10 :

les puissances intérieures qui agissent sur le système Σ sont :

- puissance développée par la motorisation : $P_{\text{arbre moteur}\leftrightarrow 3} = c_m(t)\omega_m(t)$;
- puissance dissipée par l'actionneur linéaire (imperfection des différentes liaisons du système) : $P_{\text{diss}} = -(1-\eta)c_m(t)\omega_m(t)$;

- une fois le rendement global pris en compte, on peut supposer les différentes liaisons parfaites ainsi elles ne dissipent pas de puissance ;
- puissance inter-effort dûe au ressort : $P_{3\leftrightarrow 4} = \left\{\mathcal{V}_{4/3}\right\} \otimes \left\{\mathcal{T}_{3\to 4}\right\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \dot{y}(t)\overrightarrow{y}_0 \end{Bmatrix}_K \otimes \begin{Bmatrix} -K_{\text{res}}y(t)\overrightarrow{y}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_K = -K_{\text{res}}\dot{y}(t)y(t)$ (ATTENTION à la définition de $y(t)$ pour bien gérer les signes...).

Q11 :

On a par composition des vitesses $\overrightarrow{V}_{K,4/0} = \overrightarrow{V}_{K,4/3} + \overrightarrow{V}_{K,3/0}$.

Or $\overrightarrow{V}_{K,4/0} = \overrightarrow{0}$ car les solides (0) et (4) sont immobiles. De plus $\overrightarrow{V}_{K,4/3} = \dot{y}(t)\overrightarrow{y}_0$ par définition de $y(t)$. Enfin $\overrightarrow{V}_{K,3/0} = \overrightarrow{V}_{K,3/R_0}$ car (0) est immobile, de plus $\overrightarrow{V}_{K,3/R_0} = \overrightarrow{V}_{J,3/R_0}$ par mouvement de translation de $3/R_0$ et $\overrightarrow{V}_{J,3/R_0} = -\dfrac{pas}{2\pi}\lambda\omega_m(t)\overrightarrow{y}_0$ d'après la question 6.

Finalement $\boxed{\dot{y}(t) = \dfrac{pas}{2\pi}\lambda\omega_m(t)}$.

Q12 :

Le Théorème de l'Énergie Cinétique appliqué à l'ensemble Σ s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}E_c(\Sigma/R_0)}{\mathrm{d}t} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

avec P_{ext} la somme des puissances extérieures (nulle ici) et $P_{\text{int}} = c_m(t)\omega_m(t) - (1-\eta)c_m(t)\omega_m(t) - K_{\text{res}}\dot{y}(t)y(t)$ la somme des puissances intérieures.

Or $\dot{y}(t)y(t) = K_{\text{trans}}\omega_m(t)y(t)$. Finalement d'après les questions précédentes :

$$I_{\text{eq}}\dot{\omega}_m(t)\omega_m(t) = \eta c_m(t)\omega_m(t) - K_{\text{res}}K_{\text{trans}}\omega_m(t)y(t)$$

En simplifiant par $\omega_m(t)$ de part et d'autre de l'équation, on obtient le résultat voulu avec $\boxed{Q = \eta}$ et $\boxed{T = K_{\text{res}}K_{\text{trans}}}$.

Q13 :

On a la relation $\dot{y}(t) = K_{\text{trans}}\omega_m(t)$, on réécrit alors l'équation du mouvement :

$$\frac{I_{\text{eq}}}{K_{\text{trans}}}\ddot{y}(t) + K_{\text{res}}K_{\text{trans}}y(t) = \eta c_m(t)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé non amorti de pulsation propre $\omega_0 = K_{\text{trans}}\sqrt{\dfrac{K_{\text{res}}}{I_{\text{eq}}}}$.

Remarque : c'est un système à la limite de l'instabilité (pôles à parties réelles nulles), d'où la remarque sur la nécessité d'un asservissement dans le sujet.

Q14 :

Dans le domaine de Laplace et à conditions de Heaviside :

- $U_I(p) = RI_m(p)$;
- $I_{\text{eq}}p\Omega_m(p) = Q \cdot C_m(p) - C_r(p)$;
- $C_r(p) = T \cdot Y(p)$;
- $C_m(p) = k_c I_m(p)$.

Ainsi on identifie dans le schéma-blocs : $\boxed{K_3 = Q \cdot k_c}$ et $\boxed{K_5 = T}$.

On a $\dot{y}(t) = K_{\text{trans}}\omega_m(t)$ soit dans le domaine de Laplace $\frac{K_{\text{trans}}}{p}\Omega_m(p) = Y(p)$. On identifie $\boxed{H_6(p) = \frac{K_{\text{trans}}}{p}}$.

Q15 :

On ramène la grande boucle de retour (celle avec le gain K_{capt}) sur la sortie $F(p)$, le gain sur la boucle de retour devient alors $\frac{K_{\text{capt}}}{K_{\text{res}}}$.

Ainsi pour valider la condition demandée il faut $\boxed{K_{\text{adapt}} = \frac{K_{\text{capt}}}{K_{\text{res}}}}$.

Q16 : On calcule l'erreur vis-à-vis d'une entrée en perturbation constante donc on s'intéresse à la fonction de transfert en régulation ($\omega_c(t) = 0 \; et \; c_r(t) = \; C_r u(t)$). Par Black, on a :

$$\frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = -\frac{\frac{1}{I_{eq}p}}{1 + \frac{1}{I_{eq}p}.\frac{K_1K_3}{R}C_v(p)} = -\frac{1}{I_{eq}p + \frac{K_1K_3K_i}{R}\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p}} = -\frac{R\tau_i p}{R\tau_i I_{eq}p^2 + K_1K_3K_i(1+\tau_i p)}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty}\omega_m(t) = \lim_{p\to 0} p\,\Omega_m(p) = \lim_{p\to 0} p\left(-\frac{R\tau_i p}{R\tau_i I_{eq}p^2 + K_1K_3K_i(1+\tau_i p)}\right)\frac{C_r}{p} = 0$$

Ce qui signifie qu'un couple résistant constant n'a pas d'influence sur la vitesse moteur. Le critère de précision est bien respecté.

Q17 :

On décale la boucle du capteur angulaire de vitesse d'un cran vers la droite, on trouve alors immédiatement $\boxed{H_9(p) = \frac{1}{H_6(p)}}$.

On peut ensuite appliquer la formule de Black à la boucle qui possède la chaîne de retour K_5, on trouve

$$\frac{Y(p)}{QC_m(p)} = \frac{\frac{H_6(p)}{I_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{H_6(p)}{I_{\text{eq}}p}K_5}$$, par conséquent $\boxed{H_8(p) = \frac{H_6(p)}{1 + \frac{H_6(p)}{I_{\text{eq}}p}K_5}}$.

Q18 :

On a déjà montré en question 16 que $K_{\text{adapt}} = \frac{K_{\text{capt}}}{K_{\text{res}}}$, en factorisant dans la figure 14 on trouve le $\boxed{K_{10} = \frac{K_{\text{capt}}}{K_{\text{res}}}}$ de la figure 15.

Q19 :

Par formule de Black sur la boucle interne on trouve $\boxed{G(p) = \frac{H_2(p)H_8(p)\;K_{res}}{I_{\text{eq}}p + H_2(p)H_8(p)H_9(p)}}$.

Q20 :

Sur la figure 16 la simulation s'arrête quand le dépassement vaut 2,5%, soit 41N. On ne peut pas évaluer le temps de réponse du système puisque le régime stationnaire pour une consigne en échelon n'est pas atteint.

Sur le relevé expérimental ce temps de réponse est clairement inférieur à la valeur 1s demandée par le cahier des charges et il n'y a pas de dépassement (saturation à 40N). Le cahier des charges concernant le temps de réponse à 5% est validé expérimentalement.

La vitesse de montée expérimentale vaut environ $\dfrac{36-4}{0,5-0,1} = 80\text{N/s} < 100\text{N/s}$ donc le critère de vitesse de montée est aussi respecté. Toutefois la vitesse de montée maximale relevée sur la courbe de simulation vaut environ $\dfrac{41-7}{0,28-0,12} = 212\text{N/s} > 100\text{N/s}$, le critère de vitesse en montée n'est pas respecté lors de la simulation.

Q21 :

On a $\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ \ddot{f}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ -18\dot{f}(t) + 1,18\omega_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[1](t) \\ -18E[1](t) + 1,18\omega_c(t) \end{pmatrix}$ avec $E[1](t) = \dot{f}(t)$ la deuxième coordonnée du vecteur $E(t)$. Alors $\boxed{G\left(E(t), \omega_c(t), t\right) = \begin{pmatrix} E[1](t) \\ -18E[1](t) + 1,18\omega_c(t) \end{pmatrix}}$.

Q22 :

```
def G(E, wc, t):
    G0 = E[1] # Première coordonnée
    G1 = -18*E[1] + 1.18*wc # Deuxième coordonnée
    return [G0,G1]
```

Q23 :

```
def FBFsl(E, t):
    Fcons = 40 # échelon de consigne de 40 N
    K10 = 0.0277 # adaptation
    Kcor = 5400 # gain du correcteur proportionnel
    wc = Kcor*K10*(Fcons - E[0]) # Vitesse angulaire de consigne
    return G(E, wc, t)
```

Q24 :

```
def FBFsl(E, t):
    Fcons = 40 # échelon de consigne de 40 N
    K10 = 0.0277 # adaptation
    Kcor = 5400 # gain du correcteur proportionnel
    wcmax = 1250 # limitation en vitesse angulaire dans l'intervalle [-wcmac, wcmax]
    wc = Kcor*K10*(Fcons - E[0]) # Vitesse angulaire de consigne
    # Prise en compte de la saturation
    if wc > wcmax:
        wc = wcmax
    if wc < -wcmax:
        wc = -wcmax
    return G(E, wc, t)
```

Q25 :

Le système est stable, ensuite :

- on a une valeur maximale de 41N environ, soit un dépassement de $\dfrac{41-40}{40} = 2,5\%$ (dépassement au maximum autorisé) ;
- le système est précis pour une entrée en échelon (critère Id1.2 validé) ;
- le temps de réponse à 5% est inférieur à 0,6s (< 1s), le critère de rapidité sur le temps de réponse est validé ;
- la pente maximale relevée sur la courbe vaut $\dfrac{36-4}{0,5-0,1} = 80\text{N/s} < 100\text{N/s}$, le critère de vitesse de montée est respecté.

Ainsi tous les items du cahier des charges sont validés.

Problème N°2 : Inverseur de poussée

Q1 :

On a le modèle local suivant :

$$d\mathcal{T}_{air\to 3} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dR}(air \to 3) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{(M)}$$

avec :

- $\overrightarrow{dR}(air \to 3) = -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3$ où $dS = dx \cdot dz$
- $\overrightarrow{O_2M} = x \cdot \vec{x}_3 + z . \vec{z_3}$ où $x \in [0; L_3]$ et $z \in \left[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}\right]$

On déplace le modèle local en O_2, point fixe :

$$d\mathcal{T}_{air\to 3} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dR}(air \to 3) \\ \overrightarrow{O_2M} \wedge \overrightarrow{dR}(air \to 3) \end{array} \right\}_{(O_2)} = \left\{ \begin{array}{c} -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3 \\ (x \cdot \vec{x}_3 + z . \vec{z_3}) \wedge -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}$$

$$d\mathcal{T}_{air\to 3} = \left\{ \begin{array}{c} -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3 \\ -p_S \cdot x \cdot dx \ \ dz \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}$$

En intégrant sur le domaine défini, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{T}_{air\to 3} = \left\{ \begin{array}{c} -p_S \cdot L_3 \cdot b \cdot \vec{y}_3 \\ -p_S \cdot \frac{L_3^2}{2} \cdot b \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}}$$

Q2 :

La vis 1 est assimilable (si on néglige l'influence du filet sur l'opérateur d'inertie) à un solide de révolution d'axe $(O_0, \vec{x}_0)$. On a donc bien :

$$I(O_0, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, -, -)}$$

Le volet 3 est un solide qui présente des symétries (seules deux sont nécessaires pour conclure) :

- de plan $(G_3, \vec{z}_0, \vec{x}_3)$;
- de plan $(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$;
- de plan $(G_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.

On a donc bien :

$$I(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

Q3 :

Travail préparatoire : Détermination des relations cinématiques.

L'hélicoïdale entre 1 et 2 est à pas à droite. On a donc :

$$V_{21} = \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{21}$$

Or, $V_{21} = V_{20} = V$, car $V_{01} = 0$ (1 est en liaison pivot par rapport à 0) et $\omega_{21} = \omega_{01} = -\dot{\theta}_f$ car $\omega_{20} = 0$ (2 est en liaison glissière par rapport à 0).

On a donc :

$$V_{20} = \frac{-p}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{\theta}_f \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_b = \frac{-p}{2 \cdot \pi} \cdot K_{cc} \cdot \dot{\theta}_f$$

On isole l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On a :

- comme la vis 1 est en rotation autour d'un axe fixe $(O_0, \overrightarrow{x}_0)$ à une vitesse θ_f :

$$E_{C,1/0} = \frac{1}{2} \cdot A_1 \cdot \dot{\theta}_f^2$$

- comme l'ensemble mobile 2 est en translation rectiligne de direction $\overrightarrow{x}_0$ à une vitesse V_{20} :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot V_{20}^2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \dot{\theta}_f^2$$

- le volet 3 ayant un mouvement quelconque :

$$2 \cdot E_{C3} = \mathcal{V}_{3/0} \otimes \mathcal{C}_{3/0}$$

avec :

- $\mathcal{V}_{3/0} = \mathcal{V}_{3/2} + \mathcal{V}_{2/0}$;
- $\mathcal{V}_{2/0} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ V_{20} \cdot \overrightarrow{x}_0 \end{array} \right\}_{G_3}$ car 2 est en translation par rapport à 0 ;

- $\mathcal{V}_{3/2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_b \cdot \overrightarrow{z}_0 \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{O_2} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_b \cdot \overrightarrow{z}_0 \\ \frac{L_3}{2} \cdot \dot{\theta}_b \cdot \overrightarrow{y}_3 \end{array} \right\}_{G_3}$ car $\overrightarrow{G_3O_2} = -\frac{L_3}{2} \cdot \overrightarrow{x}_3$;
- $\mathcal{C}_{3/0} = \left\{ \begin{array}{c} M_3 \cdot \overrightarrow{V}_{G_3/0} \\ \overrightarrow{\sigma}_{G_3,3/0} \end{array} \right\}_{G_3}$;
- $\overrightarrow{V}_{G_3/0} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_0G_3}}{dt}\right|_0 = V_{20} \cdot \overrightarrow{x}_0 + \frac{L_3}{2} \cdot \dot{\theta}_b \overrightarrow{y}_3$;
- $\overrightarrow{\sigma}_{G_3,3/0} = I(G_3, 3)\overrightarrow{\Omega}_{3/0} = C_3 \cdot \dot{\theta}_b \cdot \overrightarrow{y}_3$ car G_3 est le centre d'inertie du volet 3

Ainsi, on obtient :

$$E_{C3} = \frac{1}{2}\left(C_3 \cdot \dot{\theta}_b^2 + M_3 \cdot \left(V_{20}^2 + \frac{L_3^2}{4} \cdot \dot{\theta}_b^2\right) - M_3 \cdot L_3 \cdot \dot{\theta}_b \cdot V_{20} \cdot sin(\theta_b)\right)$$

- la masse de la bielle 4 étant négligeable :

$$E_{C4} = 0$$

Au bilan, l'énergie cinétique totale de l'ensemble isolé vaut :

$$E_{CT} = \frac{1}{2}\underbrace{\left[A_1 + \frac{p^2}{4\cdot\pi^2}(M_2 + M_3) + \frac{K_{cc}^2\cdot p^2}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(C_3 + M_3\cdot\frac{L_3^2}{4}\right) - M_3\cdot L_3\cdot\frac{K_{cc}\cdot p^2}{4\cdot\pi^2}\cdot sin(\theta_b)\right]}_{J_{eq}}\cdot\dot{\theta}_f^2$$

On a bien la forme demandée pour J_{eq} avec :

$$\boxed{A_{eq} = A_1 + \frac{p^2}{4\cdot\pi^2}(M_2 + M_3) + \frac{K_{cc}^2\cdot p^2}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(C_3 + M_3\cdot\frac{L_3^2}{4}\right)}$$

$$\boxed{B_{eq} = - M_3\cdot L_3\cdot\frac{K_{cc}\cdot p^2}{4\cdot\pi^2}}$$

Q4 :

On isole l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. On effectue le bilan des actions mécaniques et on exprime la puissance que chacune d'entre-elles développe :

- les liaisons étant parfaites, il n'y a aucune puissance intérieure dissipée, toutes les puissances sont extérieures ;
- Pesanteur→ 2.
  Le mouvement de 2 par rapport à 0 étant orthogonal à la pesanteur, on a :

$$P_{pes\to 2} = 0$$

- Pesanteur→ 3.
  On a :

$$\mathcal{T}_{pes\to 3} = \left\{\begin{matrix} -M_3\cdot g\cdot\overrightarrow{y}_0 \\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_{G_3} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{3/0} = \left\{\begin{matrix} \dot{\theta}_b\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ V_{20}\cdot\overrightarrow{x}_0 + \frac{L_3}{2}\cdot\dot{\theta}_b\overrightarrow{y}_3\end{matrix}\right\}_{G_3}$$

  donc :

$$P_{pes\to 3} = -M_3\cdot g\cdot\frac{L_3}{2}\cdot\dot{\theta}_b\cdot cos(\theta_b) = K_{cc}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi}\cdot M_3\cdot g\cdot\frac{L_3}{2}\cdot cos(\theta_b)\cdot\dot{\theta}_f$$

- Flex-shat→ 1.
  On a :

$$\mathcal{T}_{Flex-shat\to 1} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{0} \\ C_f\cdot\overrightarrow{x}_0\end{matrix}\right\}_{O_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{1/0} = \left\{\begin{matrix} \dot{\theta}_f\cdot\overrightarrow{x}_0 \\ \overrightarrow{0}\end{matrix}\right\}_{O_0}$$

  donc :

$$P_{Flex-shat\to 1} = C_f\cdot\dot{\theta}_f$$

- Air→ 3.
  On a :

$$\mathcal{T}_{air\to 3} = \left\{\begin{matrix} F_{air}\cdot\overrightarrow{y}_3 \\ \frac{L_3}{2}\cdot F_{air}\cdot\overrightarrow{z}_3\end{matrix}\right\}_{O_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{3/0} = \left\{\begin{matrix} \dot{\theta}_b\cdot\overrightarrow{z}_0 \\ V_{20}\cdot\overrightarrow{x}_0\end{matrix}\right\}_{O_2}$$

  donc :

$$P_{air\to 3} = -Fair\cdot V_{20}\cdot sin(\theta_b) + \frac{L_3}{2}\cdot F_{air}\cdot\dot{\theta}_b = \dot{\theta}_f\cdot F_{air}\cdot\frac{p}{2\cdot\pi}\cdot\left(sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2}\cdot K_{cc}\right)$$

On applique alors le théorème de l'énergie-puissance :

- Calcul de $\dfrac{dE_{CT}}{dt}$.

  Comme J_{eq} dépend de θ_b qui dépend du temps, on a :

$$\frac{dE_{CT}}{dt} = J_{eq} \cdot \dot\theta_f \cdot \ddot\theta_f + \frac{1}{2} \cdot \dot\theta_b \cdot B_{eq} \cdot sin(\theta_b)\dot\theta_f^2 = \dot\theta_f \cdot \left(J_{eq} \cdot \ddot\theta_f - \frac{1}{2} \cdot B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{2 \cdot \pi} \cdot \dot\theta_f^2\right)$$

- Calcul de P_T la somme des puissances :

$$P_T = \dot\theta_f \cdot \left[C_f + K_{cc} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot cos(\theta_b) + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc}\right)\right]$$

- D'après le théorème de l'énergie-puissance, on a donc :

$$\boxed{J_{eq} \cdot \ddot\theta_f - \cdot B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{4 \cdot \pi} \cdot \dot\theta_f^2 = C_f + \frac{K_{cc} \cdot p \cdot M_3 \cdot g \cdot L_3}{4 \cdot \pi} \cdot cos(\theta_b) + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc}\right)}$$

Problème N°3 : Téléphérique de la Vanoise

Q 1 : On est en régime permanent $V(t) = V_0$. Les vitesses de rotation de tous les éléments tournants sont cstes : donc $\frac{dE_c(E/R_0)}{dt} = 0$

Q 2 : $P(ext \to E/R_0) = 2P_m - F_{vent}V_0 \cos\gamma - MgV_0 \sin\gamma$

Q 3 : $P_{int} = C_{frott}.\omega = -f\omega_m.\omega_m = -f\omega_m^2$

Q 4 : $P_m = \frac{1}{2}\left(F_{vent}V_0 \cos\gamma + MgV_0 \sin\gamma + f\left(\frac{2V_0}{kD}\right)^2\right)$

Q 5 : $P_m = 514\ kW <$ 530 kW

Q 6 : $E_c(E/R_0) = 2 \times \frac{1}{2}J_m(\omega_m)^2 + \frac{1}{2}J_{pm}(k\omega_m)^2 + 5 \times \frac{1}{2}J_d\left(k\frac{D}{d}\omega_m\right)^2 + 50 \times \frac{1}{2}J_g\left(k\frac{D}{d_g}\omega_m\right)^2 +$
$\frac{1}{2}m\left(\frac{Dk}{2}\omega_m\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{Dk}{2}\omega_m\right)^2$

Ce qui donne : $J = 2J_m + k^2J_{pm} + 5J_d\left(k\frac{D}{d}\right)^2 + 50J_g\left(k\frac{D}{d_g}\right)^2 + m\left(\frac{Dk}{2}\right)^2 + M\left(\frac{Dk}{2}\right)^2$

Q 7 : $P_{int} = 0$ et $P(ext \to E/R_0) = -kC_f\omega_m - MgV_0 \sin\gamma$

D'où : $\dot\omega_m = \frac{1}{J}\left(-kC_f - Mg\frac{Dk}{2}\sin\gamma\right)$

Q 8 : $a = \frac{Dk}{2}\dot\omega_m = -\frac{V_0}{\tau} \Rightarrow \quad \tau = 9{,}54\ s$