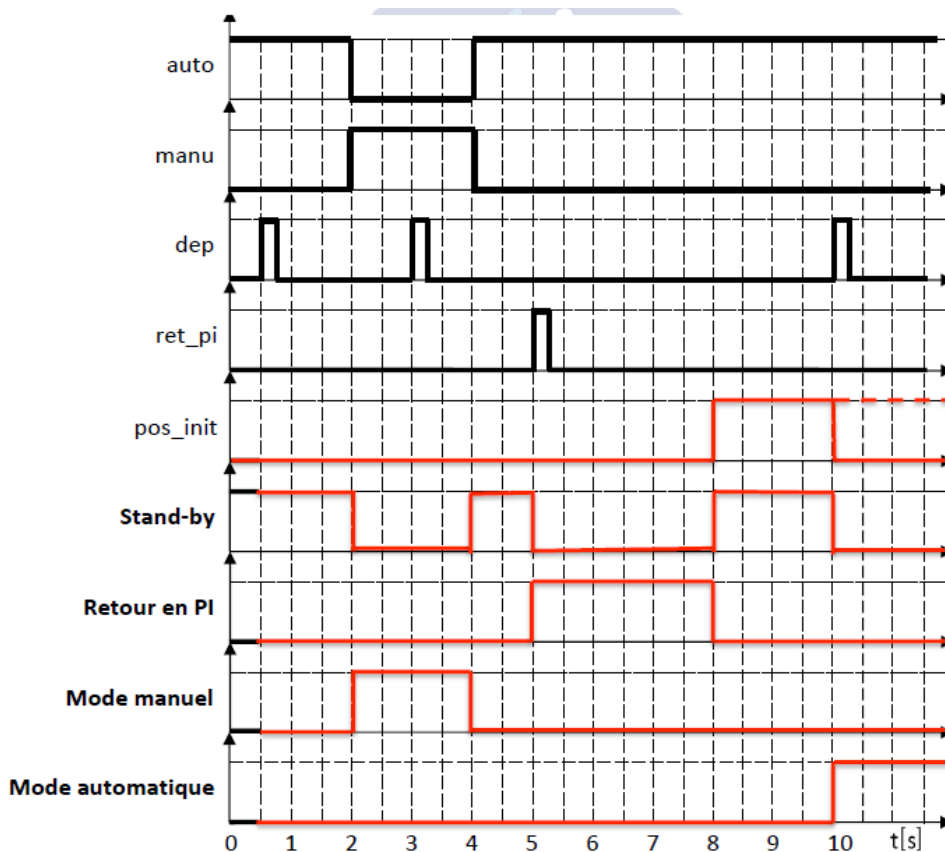


Problème n°11 : manipulateur Festo EXCM-30 (mines MP 2020)

Q1 :



Le cahier des charges est respecté grâce à la condition de garde pos_init .

Q2 : Lorsque le moteur M_1 tourne dans le sens trigonométrique positif, la longueur de la courroie entre les points D et A augmente et on a : $\Delta DC + \Delta BA = R_p \Delta \theta_1$. En utilisant les notations du sujet, on a donc :

$$\Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} = R_p \cdot \Delta \theta_1$$

De manière analogue, lorsque le moteur M_2 tourne dans le sens trigonométrique positif, la longueur de la courroie entre les points L et I diminue. On a donc :

$$\Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2} = - R_p \cdot \Delta \theta_2$$

Q3 : On écrit les variations de longueur dans les équations de contrainte géométrique données dans le sujet

$$\Delta l_{x_1} + \Delta l_{x_3} = 0 \quad ; \quad \Delta l_{y_1} + \Delta l_{y_2} = 0 \quad ; \quad \Delta l_{x_1} = \Delta l_{x_2} \quad ; \quad \Delta l_{x_3} = \Delta l_{x_4}$$

Q4 : On utilise les résultats de la **question 2**

$$\Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} = R_p \cdot \Delta \theta_1$$

$$\Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2} = - R_p \cdot \Delta \theta_2$$

En additionnant les deux équations ci-dessus (1) + (2), puis en utilisant les équations de la **question 3**, on obtient :

$$R_p \cdot (\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2) = \Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} + \Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2} = 2 \cdot \Delta l_{x_2}$$

En soustrayant les équations (1) – (2), puis en utilisant les équations de la **question 3**, on obtient

$$R_p . (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) = \Delta l_{x_1} + \Delta l_{y_1} - \Delta l_{x_2} - \Delta l_{y_2} = -2 . \Delta l_{y_2}$$

Ainsi : $\Delta l_{x_2} = \frac{R_p}{2} . (\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2)$ et $\Delta l_{y_2} = -\frac{R_p}{2} . (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2)$

Q5 : On inverse les deux relations précédentes de la **question 4** et on obtient

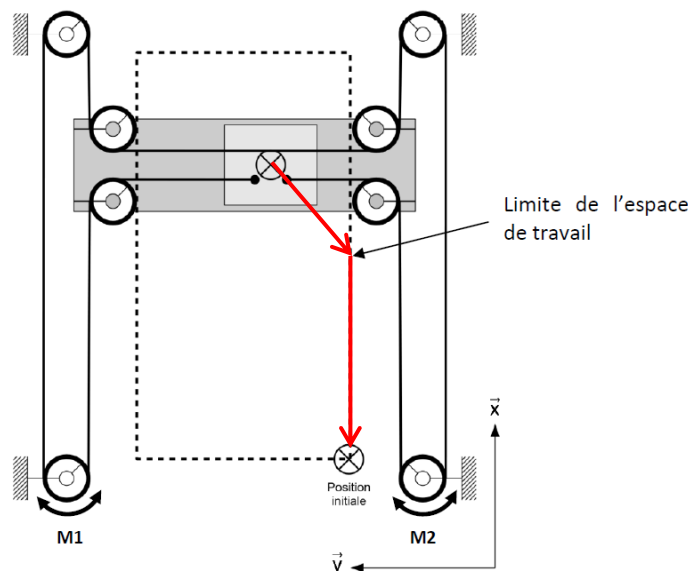
$$\Delta \theta_1 = \frac{1}{R_p} (\Delta l_{x_2} - \Delta l_{y_2}) \quad \text{et} \quad \Delta \theta_2 = -\frac{1}{R_p} (\Delta l_{x_2} + \Delta l_{y_2})$$

Q6 : Pour obtenir un déplacement longitudinal du chariot caractérisé par : $\Delta l_{x_2} > 0$ et $\Delta l_{y_2} = 0$, il faut que les moteurs M_1 et M_2 tournent à la même vitesse mais de sens opposé, avec M_1 dans le sens positif trigonométrique. Dans ce cas, en utilisant les équations de la **question 4**, on obtient bien

$$\Delta l_{x_2} = \frac{R_p}{2} . (2 . \Delta \theta_1) = R_p . \Delta \theta_1 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta l_{y_2} = -\frac{R_p}{2} . (\Delta \theta_1 - \Delta \theta_1) = 0$$

Q7 : pour la position du chariot de la figure du document réponse, $fc_{_x} \neq fc_{_x_0}$ et $fc_{_y} \neq fc_{_y_0}$. Donc selon l'algorithme, les opérations sont dans l'ordre les suivantes :

- M_2 actionné dans le sens trigo positif, M_1 à l'arrêt : $\Delta \theta_1 = 0 \Rightarrow \Delta l_{x_2} = \Delta l_{y_2}$ et $\Delta \theta_2 > 0 \Rightarrow \Delta l_{x_2} < 0$. Le chariot se déplace donc le long de la diagonale tracée sur la figure du document réponses jusqu'à atteindre $fc_{_y} = fc_{_y_0}$.
- $fc_{_y} = fc_{_y_0}$ et $fc_{_x} \neq fc_{_x_0}$: M_1 est actionné dans le sens horaire (négatif) et M_2 dans le sens trigo (positif), à la même vitesse. $\Delta \theta_2 = -\Delta \theta_1$ alors $\Delta l_{x_2} = -R_p . \Delta \theta_2$ et $\Delta l_{y_2} = 0$. Le chariot se déplace selon la direction $-\vec{x}$ jusqu'à atteindre $fc_{_x} = fc_{_x_0}$



Q8 :

• **Pour le cas 2**, on isole le système constitué du ressort 2 de raideur k_2 et de la masse ponctuelle m . Le bilan des actions mécaniques extérieures est le suivant :

- le poids ;
- les actions de liaison ;
- l'action du ressort 1 sur le ressort 2 ;
- la force \vec{F}

On écrit le TRS en projection suivant l'axe \vec{x} : $F(t) - k_1 \cdot x_1(t) = 0$

Par une démarche similaire et en isolant la masse ponctuelle m , on obtient : $F(t) - k_2 \cdot (x(t) - x_1(t)) = 0$

On a donc : $F(t) = k \cdot x(t) = k_1 \cdot x_1(t) = k_2 \cdot (x(t) - x_1(t))$ et

$$x(t) = F(t)/k \quad x_1(t) = F(t)/k_1 \quad x(t) - x_1(t) = F(t)/k_2$$

On obtient donc $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ en supposant $F(t) \neq 0$. Ainsi la raideur du ressort équivalent est : $k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$

• **Pour le cas 3**, on isole la masse ponctuelle m . Le bilan des actions mécaniques extérieures est le suivant :

- le poids ;
- les actions de liaison ;
- l'action du ressort 1 sur m ;
- l'action du ressort 2 sur m ;
- la force \vec{F}

On écrit le TRS en projection suivant l'axe \vec{x} : $F(t) - k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) = 0 \Rightarrow F(t) = (k_1 + k_2)x(t)$

Ainsi la raideur du ressort équivalent est : $k = k_1 + k_2$

Q9 : On isole la poulie PR. Le bilan des actions mécaniques extérieures est :

- l'action mécanique de la liaison pivot ;
- l'action du ressort de raideur kc_2 ;
- l'action du ressort de raideur kc_3 .

On néglige l'inertie de la poulie et on applique le TMD (TMS du coup) en H en projection suivant la direction \vec{z}

$$(-R_p \vec{y} \wedge F_{2 \rightarrow PR} \vec{x} + R_p \vec{y} \wedge F_{3 \rightarrow PR} \vec{x}) \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow F_{2 \rightarrow PR} = F_{3 \rightarrow PR}$$

Ce qui correspond au cas 2, lorsque l'effort de rappel des deux ressorts est le même (par analogie A du cas 2 $\rightarrow H$ de la figure 8 du sujet). Les ressorts de raideur kc_2 et kc_3 sont donc en série.

Q10 : Les ressorts kc_2 et kc_3 sont en série. Le ressort kc_1 est en parallèle avec la mise en série des 2 autres ressorts. On obtient donc la raideur équivalente du système poulies-courroie :

$$K_{eq} = kc_1 + \frac{kc_2 \cdot kc_3}{kc_2 + kc_3}$$

Q11 : On déplace le point de prélèvement de la grandeur $T_c(p)$ vers la droite au point $V_x(p)$. Il faut donc multiplier le bloc de retour R_p par $f_2 + M_t p$. La fonction de transfert du schéma-blocs interne est :

$$\frac{V_x(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{eq}}{p(f_2 + M_t p) + K_{eq}}$$

On obtient donc pour le schéma blocs global :

$$H(p) = \frac{R_p K_{eq}}{(p(f_2 + M_t p) + K_{eq})(f_1 + J_R p) + R_p^2 K_{eq} (f_2 + M_t p)}$$

D'où :

$$a_0 = K_{eq} (f_1 + R_p^2 f_2) \quad a_1 = f_1 f_2 + K_{eq} (J_R + R_p^2 M_t) \quad a_2 = J_R f_2 + M_t f_1 \quad a_3 = M_t J_R$$

Q12 : La fonction de transfert $H(p)$ possède 3 pôles : un pôle réel ($p_1 = -20$) et deux pôles complexes conjugués ($p_{2,3} = -116 \pm 380i$). La partie réelle des deux pôles complexes conjugués est environ 6 fois plus petite que celle du pôle réel. p_1 est donc le pôle dominant, on peut alors approcher la fonction de transfert $H(p)$ par :

$$H_a(p) = \frac{K_a}{1 + \tau_a p} \quad \text{avec } \tau_a = -1/p_1 = 0.05 \text{ s}$$

Q13 : Si on considère K_{eq} très grand devant les autres coefficients, on peut approcher $H(p)$ par :

$$H(p) = \frac{R_p K_{eq}}{K_{eq} (f_1 + R_p^2 f_2) + K_{eq} (J_R + R_p^2 M_t) p}$$

D'où :

$$H_a(p) = \frac{\frac{R_p}{f_1 + R_p^2 f_2}}{1 + \frac{J_R + R_p^2 M_t}{f_1 + R_p^2 f_2} p}$$

On retrouve bien un premier ordre dont les coefficients caractéristiques sont indépendants de K_{eq}

Q14 : Le codeur incrémental possède 500 fentes (association d'une fente transparente et une fente opaque). La mesure de position se fait sur chaque front montant et front descendant des deux voies A et B :

Il y a donc $2 \times 2 \times 500 = 2000$ points de mesure par tour.

Le gain K_{pos} est donc :

$$K_{pos} = 2000/2\pi \approx 318 \text{ pt/rad}$$

Q15 : La valeur de K_a est telle que $\varepsilon_\theta(p) = 0$, lorsque $X(p) = X_C(p)$ (voir figure 14 du sujet). Le gain K_a de l'adaptateur, nécessaire à un bon réglage de l'asservissement de position, est donc :

$$K_a = \frac{K_{pos}}{R_p} = \frac{2000}{2\pi * 5.10^{-3}} \approx 6.3 \cdot 10^4 \text{ rad/m}$$

Q16 : La précision Δx de positionnement en millimètres de la traverse par rapport au bâti est :

$$\Delta x = R_p * 2\pi/2000 \approx 0.015 \text{ mm}$$

Si l'asservissement en position est précis vis-à-vis d'une consigne en échelon, la précision de positionnement de la traverse étant inférieure à 0,05 mm, l'exigence Id 1.1.1 du cahier des charges est vérifiée.

Q17 : La fonction de transfert en boucle fermée du schéma-blocs de la figure 16 du sujet est :

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_m K_{vit}}{1 + \tau_m p + K_m K_{vit}}$$

L'erreur statique est donc ($\omega_c(t) = 1. u(t)$ avec $u(t)$ échelon unitaire) :

$$\varepsilon_{\Omega\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_c(t) - \omega_m(t)) = 1 - \frac{K_m K_{vit}}{1 + K_m K_{vit}} = \frac{1}{1 + K_m K_{vit}} \neq 0$$

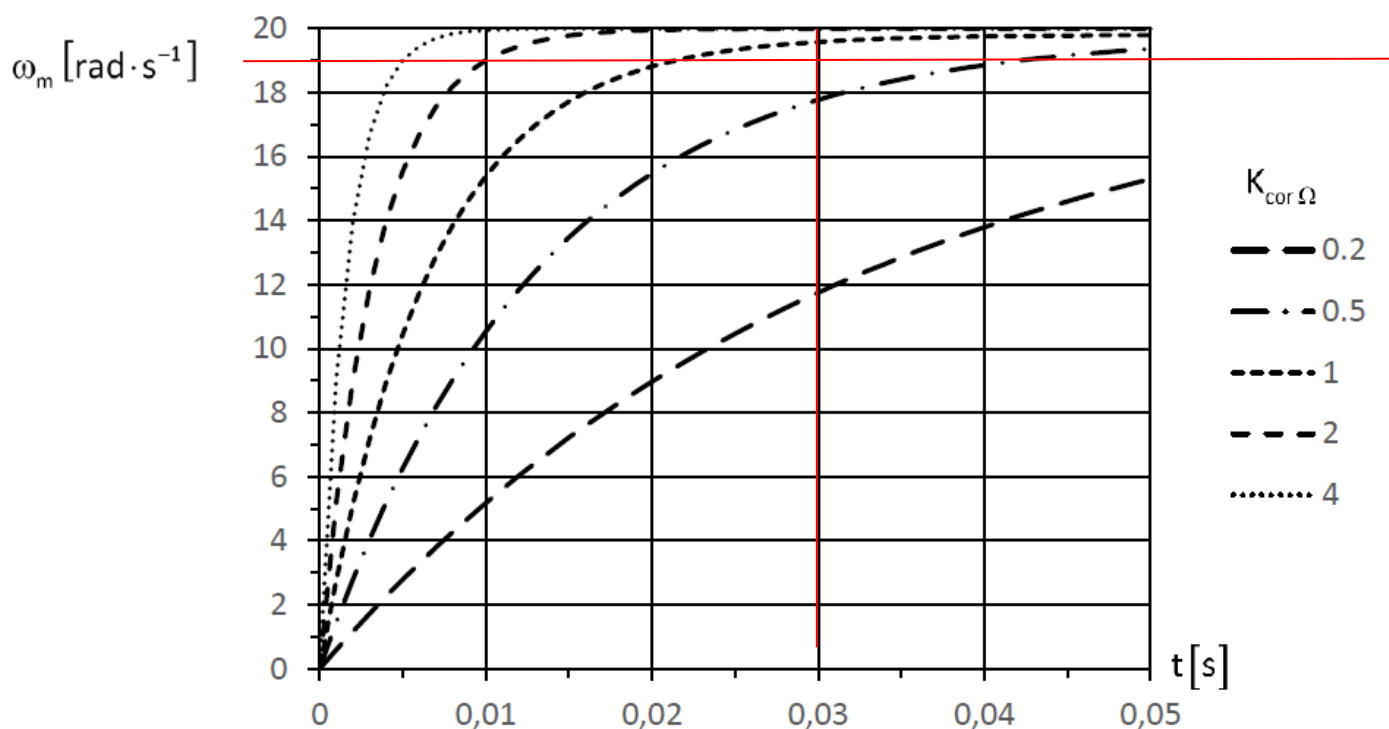
ce qui ne vérifie pas l'exigence Id 1.1.2.1 du cahier des charges : l'erreur statique de vitesse pour une entrée en échelon de la boucle tachymétrique doit être nulle.

On peut mentionner que la classe de la fonction de transfert en boucle ouverte est nulle. Ainsi

l'erreur statique en réponse à un échelon unitaire est $\frac{1}{1+K_{BO}}$, ce qui donne ici $\frac{1}{1+K_m K_{vit}}$

Q18 : Le correcteur $C_{\Omega}(p)$ est un correcteur proportionnel-intégral qui permet d'obtenir une fonction de transfert en boucle ouverte corrigée de classe 1 lorsque celui-ci est placé dans la chaîne directe de l'asservissement (ce qui est le cas ici). Ainsi l'erreur statique en réponse à un échelon unitaire devient nulle ce qui valide l'exigence Id 1.1.2.1 vis-à-vis de la précision.

Q19 : D'après le cahier des charges, la réponse indicielle de la boucle de vitesse doit avoir une erreur statique nulle et un temps de réponse $t_{5\%} < 30$ ms. Les gains $K_{cor} = \{4, 2, 1\}$ correspondent



Réponses à une commande en échelon de vitesse de 20 rad/s de la boucle tachymétrique pour différentes valeurs du gain $K_{cor\Omega}$

Q20 : partir de la figure, on remarque que :

- la valeur de la phase de la fonction de transfert varie de -90° aux BF à -180° aux HF
- la courbe de gain en dB possède une pente à -20 dB/dec aux BF et à -40 dB/dec aux HF.

Ceci est caractéristique d'une fonction de transfert du second ordre de classe 1 :

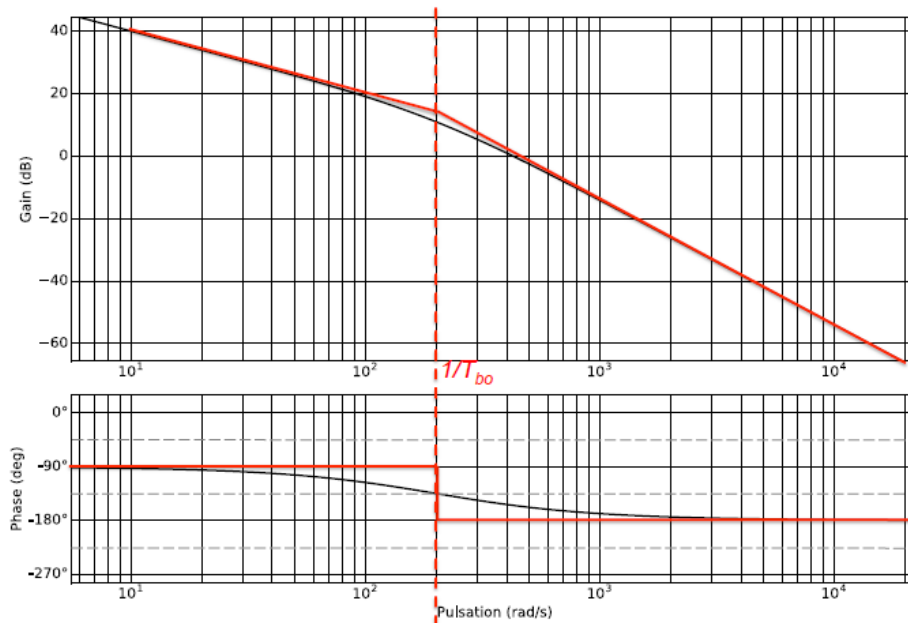
$$H_{bo_\theta}(p) = \frac{K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo} p)}$$

On identifie graphiquement les paramètres :

- La pulsation correspondant à une phase de -135° vaut $1/\tau_{bo}$. On identifie : $1/\tau_{bo} = 200$ rad/s d'où

$$\tau_{bo} = 0.005 \text{ s}$$

- Aux BF, pour une pulsation de $10 \text{ rad/s} \ll 200 \text{ rad/s}$, on a $H_{bo_\theta}(j\omega) \approx \frac{K_{bo}}{j\omega}$ donc
 $|H_{bo_\theta}(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K_{bo} - 20 \log \omega \approx 40 \text{ dB}$ d'où
 $K_{bo} = 1000 \text{ s}^{-1}$



Q21 : La fonction de transfert en boucle fermée (non corrigée) correspondante est :

$$H_{bf_\theta}(p) = \frac{K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo} p) + K_{bo}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{bo}} p + \frac{\tau_{bo}}{K_{bo}} p^2} = \frac{1}{1 + 10^{-3} p + 5 \cdot 10^{-6} p^2}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est de gain unitaire

Sa pulsation propre vaut : $\omega_{bf} = \sqrt{\frac{K_{bo}}{\tau_{bo}}} = 450 \text{ rad/s}$

Son coefficient d'amortissement vaut : $\xi_{bf} = \frac{1}{2\sqrt{\tau_{bo} K_{bo}}} = 0.2$

Q22 : La fonction de transfert en boucle fermée corrigée est :

$$H_{bf_\theta}(p) = \frac{K_{cor\theta} K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo} p) + K_{cor\theta} K_{bo}}$$

C'est une fonction de transfert du second ordre standard.

On identifie alors ses paramètres caractéristiques :

Gain statique : $K_{bf} = 1$

Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{cor\theta} K_{bo}}{\tau_{bo}}}$

Coefficient d'amortissement : $\xi = \frac{1}{2\sqrt{\tau_{bo} K_{cor\theta} K_{bo}}}$

Pour satisfaire l'exigence Id 1.1.1 de non-dépassement du cahier des charges, il faut que : $\xi \geq 1$

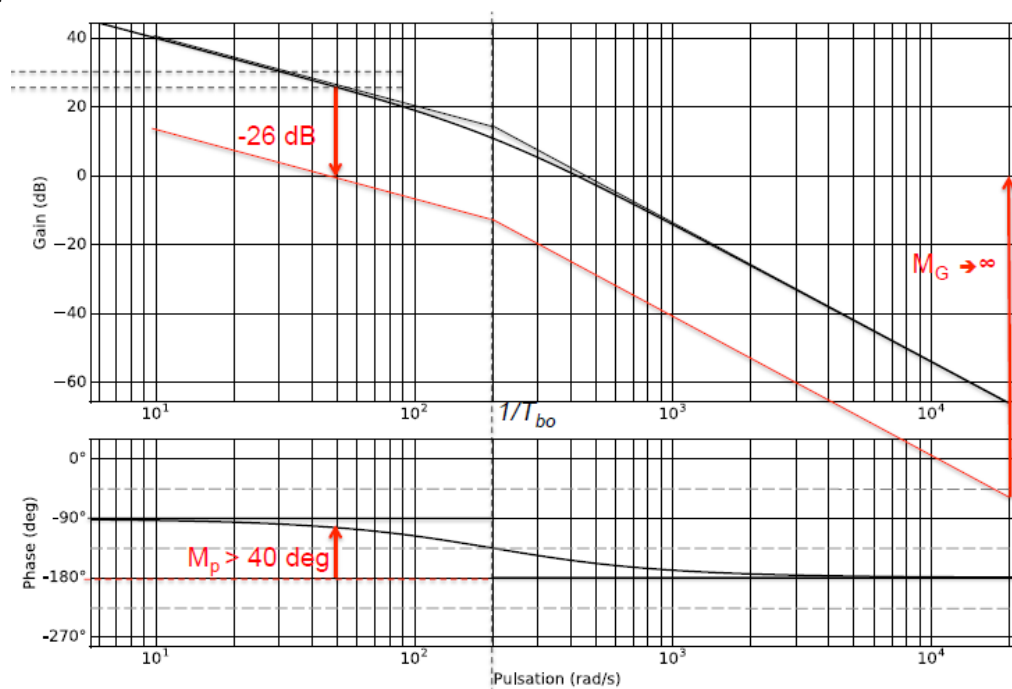
On en déduit donc que :

$$K_{cor\theta}^{max} = \frac{1}{4\tau_{bo} K_{bo}} = 0.05$$

Q23 : La fonction de transfert en boucle ouverte corrigée est :

$$H_{bo_cor}(p) = K_{cor\theta} H_{bo_o}(p) = \frac{K_{cor\theta} K_{bo}}{p(1 + \tau_{bo} p)}$$

Avec $K_{cor\theta} = K_{cor\theta}^{max} = 0.05$. Le diagramme de Bode de $H_{bo_cor}(p)$ a la même allure que le diagramme du document réponses. Il suffit de translater la courbe de gain de $20\log K_{cor\theta} = -26\text{dB}$ et ne pas modifier la tracé de phase.



Q24 : pour justifier la stabilité en boucle fermée du modèle proposé, on utilise le critère du Revers (graphique) sur la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée : la marge de gain est infinie (car la phase -180° n'est jamais atteinte) et la marge de phase est bien supérieure à 40° (voir les tracés sur la figure précédente : $M_\varphi \approx 80^\circ$). Donc le système est stable en boucle fermée et vérifie l'exigence de stabilité du cahier des charges.

Q25 : Le gain de la fonction de transfert en boucle fermée est unitaire, donc l'erreur statique sera nulle pour la réponse indicielle en position. De plus, nous avons dimensionné le correcteur de la boucle de position de manière à vérifier