Problème : Robot Lola (Mines MP 2015)

Corrigé

Q1 : Application du théorème du moment dynamique au tronc 1dans le repère galiléen lié au sol (0) en O_T en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{M}(O_T, pes \to 1).\vec{x}_0 + \underbrace{\vec{M}(O_T, hd \to 1).\vec{x}_0}_{C_R} + \underbrace{\vec{M}(O_T, 2 \to 1).\vec{x}_0}_{0} = \vec{\delta}(O_T, 1/0).\vec{x}_0$

Cette équation n'introduit pas d'inconnues de liaison ; on obtient bien l'équation de mouvement.

Q2 : $\vec{M}(O_T, pes \to 1).\vec{x}_0 = (\vec{O_T G_T} \wedge -m_1 g\, \vec{z}_0)\vec{x}_0 = -m_1 g\, \vec{O_T G_T}.\vec{y}_0 = m_1 g.z_G.\sin(\alpha)$

$$\vec{\delta}(O_T, 1/0).\vec{x}_0 = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}(O_T, 1/0).\vec{x}_0) + (\vec{V}(O_T/0) \wedge m_1.\vec{V}(G_T, 1/0)).\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}(O_T, 1/0).\vec{x}_0 = (I(O_T, 1).\vec{\Omega}(1/0)).\vec{x}_0 + (\vec{O_T G_T} \wedge m_1.\vec{V}(O_T, 1/0)).\vec{x}_0 = A_1.\dot{\alpha} - m_1.z_G.v.\cos(\alpha)$$

$$(\vec{V}(O_T/0) \wedge m_1.\vec{V}(G_T, 1/0)).\vec{x}_0 = m_1.v.\vec{z}_0.\vec{V}(G_T, 1/0) = -m_1.v.\vec{z}_0.z_G.\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 = -m_1.z_G.v.\dot{\alpha}.\sin(\alpha)$$

Soit $\vec{\delta}(O_T, 1/0).\vec{x}_0 = A_1.\ddot{\alpha} - m_1.z_G.\dot{v}.\cos(\alpha)$

D'où : $\boxed{m_1 g.z_G.\sin(\alpha) + C_R = A_1.\ddot{\alpha} - m_1.z_G.\dot{v}.\cos(\alpha)}$

Q3 :

B_1	$m_1.z_G$
B_2	$m_1.g.z_G$
B_3	$1/r$
B_4	$1/r$
B_5	k_c
B_6	k_e
B_7	$1/J_{eq}$
$H_{1(p)}$	$\dfrac{1}{R + L.p}$

Q4 : Si $\Gamma(p) = 0$

$$H_{dyn}(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)} = \frac{B_3.B_7}{p^2}.\frac{1}{1 - \frac{B_2.B_7}{p^2}} = \frac{B_3.B_7}{p^2 - B_2.B_7} = \frac{\frac{1}{r.J_{eq}}}{p^2 - \frac{m_1.g.z_G}{J_{eq}}} = \frac{\frac{1}{r}}{J_{eq}p^2 - m_1.g.z_G}$$

Q5 : $F(p) = \dfrac{H_1.B_5.H_{dyn}}{1 + H_1.B_5.H_{dyn}.B_6.B_4.p} = \dfrac{\frac{k_c}{r}}{(R + Lp)(J_{eq}p^2 - m_1.g.z_G) + \frac{k_c.k_c}{r^2}p}$

$$\boxed{F(p) = \frac{-\frac{k_c}{r.R.m_1.g.z_G}}{1 + \frac{r^2.L.m_1.g.z_G - k_c.k_c}{r^2.R.m_1.g.z_G}p - \frac{J_{eq}}{m_1.g.z_G}p^2 - \frac{L.J_{eq}}{R.m_1.g.z_G}p^3}}$$

Gain statique K : $-\dfrac{k_c}{r.R.m_1.g.z_G}$ Ordre : 3 Classe : 0

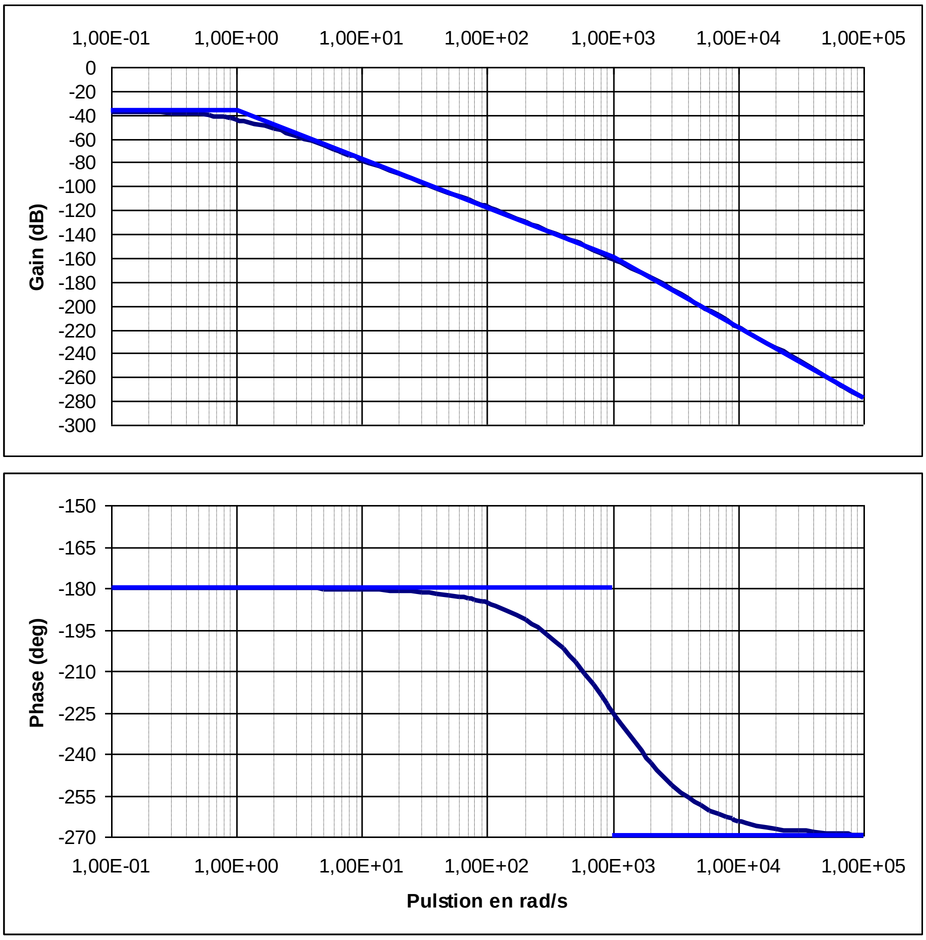
Q6 :

$G = 20\log(K) - 20\log(1+\omega^2.\tau_1^2) - 10\log(1+\omega^2.\tau_2^2)$

$\varphi = -Arc\tan(\tau_1.\omega) - \pi + Arc\tan(\tau_1.\omega) - Arc\tan(\tau_2.\omega)$

20log(K) = -37,5 dB soit $K = 10^{-\frac{37,5}{20}} = 0{,}013$ rad.V^{-1} (pas d'unité si BO ; F(p) ≠ FTBO)

$\tau_1 = 1\,s$ et $\tau_2 = 10^{-3}\,s$



Q7 : $\tau_2 << \tau_1$ donc l'effet de $1+\tau_2.p$ est négligeable sur la réponse. La forme simplifiée est justifiée.
Sur le Bode on remarque que le modèle simplifié est satisfaisant jusqu'à 100 rad/s > 50rad/s (bande passante visée en BO)

Q8 : La fonction de transfert en BO a un pôle à partie réelle positive. Le système est donc instable en BO. Le critère du Revers stipule que le système en BO ne doit pas comporter de pôle à partie réelle strictement positive pour qu'il ait un sens.
.

Q9 : Je pose $H_{ci}(p) = K_1(1+T.p)$ avec T = 1s.

$$\frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{K}{(1+\tau_1.p)(-1+\tau_1.p)}\frac{1}{1+\dfrac{K.K_1(1+T.p)}{(1+\tau_1.p)(-1+\tau_1.p)}} = \frac{K}{(1+\tau_1.p)(-1+\tau_1.p)+K.K_1(1+T.p)}$$

$$= \frac{K}{K.K_1 - 1 + K.K_1.T.p + \tau_1^2.p^2}$$

Pour que tous les termes du dénominateur soient positifs il faut $K.K_1 - 1 > 0$ et $K.K_1.T > 0$ donc $\boxed{K_1 > \frac{1}{K}}$ car $K > 0$
.
A.N. K_1 > 75 V/rad.

Q10 : $\dfrac{2\xi}{\omega_0}=\dfrac{K.K_1.T}{K.K_1-1}$ et $\omega_0^2=\dfrac{K.K_1-1}{\tau_1^2}$ soit $\xi=\dfrac{1}{2}\dfrac{K.K_1.T}{\tau_1.\sqrt{K.K_1-1}}$ d'où l'équation $K^2.T^2.K_1^2-4\xi^2\tau_1^2K.K_1+4\xi^2\tau_1^2=0$

$\Delta=16.\xi^2\tau_1^2.K^2(\xi^2\tau_1^2-T^2)>0$ et $K_{1i}=\dfrac{4\xi^2\tau_1^2K\pm4.\xi.\tau_1.K\sqrt{\xi^2\tau_1^2-T^2}}{2K^2.T^2}$ $\boxed{K_{1i}=\dfrac{2.\xi.\tau_1}{K.T^2}\left(\xi\tau_1\pm\sqrt{\xi^2\tau_1^2-T^2}\right)}$

A.N. : K_{11} = 83 V/rad ou K_{12} = 784 V/rad
Les 2 valeurs vérifient la condition de la question 9.

$K_{BO}=\dfrac{K}{K.K_1-1}$ et $\omega_0=\dfrac{\sqrt{K.K_1-1}}{\tau_1}$

K_1 (V/rad)	K_{BO}	ω_0 (rad/s)
784,0	0,0014	3,07
82,9	0,126	0,33

Q11 : Correcteur proportionnel et à avance de phase

Q12 :

$$\varphi(\omega_c)=-\pi-\text{Arc}\tan\left(\dfrac{2\xi\dfrac{\omega_c}{\omega_0}}{1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega_0^2}}\right)=-168{,}43°$$

$$\varphi_m=MP-(180+\varphi(\omega_c))=50-(180-168{,}43)=38{,}43°$$

$$\boxed{a=\dfrac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)}}=4{,}28 \qquad \boxed{T_d=\dfrac{1}{\sqrt{a}.\omega_c}}=9{,}6.10^{-3}\text{ s}$$

Q13 : $G=20\log(K_{BO})-10\log\left(\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\left(\dfrac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2\right)+10\log(a)+20\log(K_p)$

Soit : $\boxed{K_p=\dfrac{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)^2+4\xi^2\left(\dfrac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}}{K_{BO}.\sqrt{a}}}=1{,}24.10^5$ (unité inverse de celle de K_{BO} : V/rad)

Remarque : pour une erreur de $2{,}7.10^{-3}$ rad on a une tension de 335 V certainement trop grande pour le moteur. Une saturation en tension devra être installée.

Q14 :
En supposant que le passage d'accélération constante à vitesse constante se fait pour 0,32s on distingue :
- 1ère phase (accélération constante entre 0 et 320 ms) : l'angle α est perturbé mais maintenu proche de 0 par l'asservissement.
- 2ème phase (vitesse constante à partir de 320 ms) : l'angle α est ramené à 0 par l'asservissement.