Devoir surveillé n^{0}10

Mathématiques

Durée : 4 heures

CONSIGNES

- **Ce sujet est constitué de 2 exercices et 2 problèmes communs à tous les candidats.**
- **Tout matériel électronique est interdit.**
- **Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.**

Barème approximatif :

- ➛ **Exercice 1 (fractions rationnelles) : 8pts**
- ➛ **Exercice 2 (développements limités) : 5pts**
- ➛ **Problème 1 (analyse, polynômes) : 19pts (2+6+11)**
- ➛ **Problème 2 (algèbre linéaire) : 35pts (11+7+9+8)**

Exercice 1 — (Fraction rationnelle).

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Remarque. Après résolution, on pourra se rassurer en vérifiant que cette équation possède exactement quatre solutions, deux à deux opposées.

2/ On considère la fraction rationnelle : $F = \dfrac{3X^2 + 3X + 6}{X^4 - 5X^2 + 4}$.

On pourra noter : $P = 3X^2 + 3X + 6$ et $Q = X^4 - 5X^2 + 4$.

Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

3/ Pour tout entier $N \geqslant 3$, on pose : $S_N = \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2 + 3n + 6}{n^4 - 5n^2 + 4}$.

a/ Calculer S_N pour tout entier $N \geqslant 3$.

b/ Déduire de la question précédente que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et préciser $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} S_N$.

Exercice 2 — (DL, équivalents).

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x)$, et celui de $\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2 en 0.

2/ Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x^2}$.

3/ Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

—— Problème 1 — Dérivée n-ème de la fonction arctangente ——

Problématique. *Le but de ce problème est d'établir une formule générale donnant les dérivées successives de la fonction arctangente, en étudiant notamment une très jolie suite de polynômes.*

Tout au long de ce problème, f désigne la fonction arctangente :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x)$$

Partie 1 — Questions préliminaires

1/ Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

2/ Etablir que pour tout réel x on a : $\quad \cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Partie 2 — Dérivées successives de f

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

Jusqu'à la fin de ce problème, on note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie ci-dessus.

On pourra admettre que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = (1+X^2){P_n}' - 2nXP_n$$

4/ Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que :

$$P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n$$

5/ Déduire de la question précédente le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout entier $n \geqslant 2$.

Partie 2 — Racines de P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$.

Dans ce contexte, on **admet** que $f^{(n)}$ s'annule en $(n-1)$ réels deux à deux distincts.

6/ Etablir que P_n possède exactement $(n-1)$ racines réelles deux à deux distinctes.

7/ Etablir par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

8/ Justifier que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(f(x)) > 0$.

9/ A l'aide des questions précédentes, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{(n)}(x) = 0$.

10/ En déduire la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P_n.

Problème 2 — Sur les racines n-èmes de id_E

Problématique. *L'objet de ce problème est l'étude de quelques endomorphismes particuliers, appelés endomorphismes* ***itempotents***. *Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est itempotent s'il existe un entier naturel non nul n tel que $u^n = \mathrm{id}_E$; dans ce sens, u est une racine n-ème de l'identité de E.*

Cet énoncé est partagé en quatre parties : les deux premières sont consacrées à l'étude de deux cas particuliers (avec $n = 2$ et $n = 3$).[*]

La troisième partie a pour objet une propriété générale des racines cubiques de l'identité d'un espace vectoriel, et généralise la seconde.

La dernière partie étend le résultat de la troisième partie aux racines n-èmes de l'identité, avec n un entier quelconque.

Partie 1 — Etude d'un exemple avec $n = 2$

Dans cette partie, $\mathbf{E}_1$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbf{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbf{E}_1$.

On note : $\quad P_1 = X(X-1)\,; \quad P_2 = X(X-2)\,; \quad$ et $\quad P_3 = (X-1)(X-2)$.

Enfin, on note : $\quad F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2) \quad$ et $\quad G = \mathrm{Vect}(P_3)$.

1/ Etablir que $\mathbf{B'} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

2/ Etablir que : $\quad \mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

3/ Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{BB'}}$ de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B'}$.[†]

4/ **Etude d'une symétrie**. On note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On rappelle que s_F est un endomorphisme de $\mathbf{E}_1$.

- **a**/ Etablir que : $\quad (s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$
- **b**/ Justifier brièvement que : $\quad \forall\, Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$
- **c**/ Calculer $s_F(P_1)$, $s_F(P_2)$ et $s_F(P_3)$.
- **d**/ Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. A l'aide de la question précédente, calculer : $s_F\,(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3)$.
- **e**/ Montrer que $\ker\,(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 2 ; et que $\ker\,(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 1.

  Remarque : à l'issue de cette partie, on peut observer que : $\quad \mathbf{E}_1 = \ker\,(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \bigoplus \ker\,(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$

---

[*]. Et vous ne manquerez pas d'observer que la première contient un nombre tout-à-fait indécent d'applications directes du cours : elle représente à ce titre une importante source de points faciles à prendre.

[†]. Cette question a un unique intérêt : rapporter un point à tout.e étudiant.e qui sait traiter cette question de cours. La matrice $P_{\mathbf{BB'}}$ ne sera pas réutilisée dans la suite du problème.

Partie 2 — Etude d'un exemple avec $n = 3$

Dans cette partie, on note $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}_2[X]$, et on considère l'application

$$f : \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{E}_2 \qquad \text{avec } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$
$$aX^2 + bX + c \longmapsto a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c$$

Il revient au même de dire que l'application f envoie le polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(\mathrm{j}X)$.

5/ Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

6/ Etablir que : $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

7/ Montrer que $\ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2})$ est le sev de $\mathbf{E}_2$ constitué des polynômes constants.

8/ Pour tout $P \in \mathbf{E}_2$, calculer $f^2(P) + f(P) + P$. En déduire que : $\ker(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Remarque : à l'issue de cette partie, on peut observer que : $\mathbf{E}_2 = \ker(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}) \bigoplus \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2})$

Partie 3 — Cas général avec $n = 3$

Dans cette partie, on revient au cas général où $\mathbf{E}$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère un endomorphisme φ de $\mathbf{E}$, tel que : $\varphi^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.

9/ Etablir que : $(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) \circ (\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})} = (\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) \circ (\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}})$

10/ Effectuer la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 1$.

11/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\frac{1}{3}\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) - \frac{1}{3}(\varphi + 2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}) \circ (\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$$

12/ En déduire que : $\ker(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) \cap \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}}\right\}$

13/ Etablir que : $\mathbf{E} = \ker(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) \bigoplus \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})$

Partie 4 — Cas général avec $n \geqslant 2$ arbitraire

Dans cette partie, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$, et $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère un endomorphisme ψ de $\mathbf{E}$, tel que : $\psi^n = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.

14/ Etablir que : $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}$

15/ Justifier qu'il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$Q_1(\psi) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) + Q_2(\psi) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$$

16/ Etablir que :

$$\mathbf{E} = \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \bigoplus \ker(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})$$