Devoir surveillé n^{0}10

Mathématiques

Durée : 4 heures

Exercice 1 — (Fraction rationnelle).

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Remarque. Après résolution, on pourra se rassurer en vérifiant que cette équation possède exactement quatre solutions, deux à deux opposées.

En posant $X = x^2$, l'équation se réécrit : $X^2 - 5X + 4 = 0 \Longleftrightarrow (X-1)(X-4) = 0$.

On en déduit qu'un réel x est solution de $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ si et seulement si $x^2 \in \{1, 4\}$.

Conclusion. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{\pm 1, \pm 2\}$

2/ On considère la fraction rationnelle : $\quad F = \dfrac{3X^2 + 3X + 6}{X^4 - 5X^2 + 4}$.

On pourra noter : $\quad P = 3X^2 + 3X + 6$ et $Q = X^4 - 5X^2 + 4$.

Décomposer en éléments simples F dans $\mathbb{R}(X)$.

La fraction rationnelle F est de degré strictement négatif : sa partie entière est donc nulle.

Par ailleurs, selon la question précédente, on a : $F = \dfrac{3X^2 + 3X + 6}{(X-1)(X-2)(X+1)(X+2)}$

On en déduit que F possède exactement 4 pôles simples (± 1 et ± 2).

D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\exists!\ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X+2}$$

En outre, d'après le cours :

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)}\,; \quad b = \frac{P(2)}{Q'(2)}\,; \quad c = \frac{P(-1)}{Q'(-1)}\,; \quad d = \frac{P(-2)}{Q'(-2)}$$

avec $P = 3X^2 + 3X + 6$ et $Q' = 4X^3 - 10X$. On en déduit que :

$$a = \frac{12}{-6} = -2\,; \quad b = \frac{24}{12} = 2\,; \quad c = \frac{6}{6} = 1\,; \quad d = \frac{12}{-12} = -1$$

Conclusion. $F = \dfrac{3X^2 + 3X + 6}{X^4 - 5X^2 + 4} = \dfrac{2}{X-2} - \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{1}{X+1} - \dfrac{1}{X+2}$

3/ Pour tout entier $N \geqslant 3$, on pose : $S_N = \displaystyle\sum_{n=3}^{N} \frac{3n^2+3n+6}{n^4-5n^2+4}$.

a/ Calculer S_N pour tout entier $N \geqslant 3$.

Soit N un entier $\geqslant 3$. On a, selon la question précédente :

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \left(\frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= 2\sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) + \sum_{n=3}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 2\left(1 - \frac{1}{N-1}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N+2}\right)$$

Conclusion. Pour tout entier $N \geqslant 3$, on a : $S_N = \dfrac{9}{4} - \dfrac{2}{N-1} - \dfrac{1}{N+2}$

b/ Déduire de la question précédente que la suite $(S_N)_N$ est convergente, et préciser $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$.

D'après la question précédente, la suite $(S_N)_N$ est convergente, et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{9}{4}$.

Exercice 2 — (DL, équivalents).

1/ Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x)$, et celui de $\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2 en 0.

Selon le cours : $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$.

2/ Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x^2}$.

D'après la question précédente : $\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$

3/ Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes, on a :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} - 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{6n^4} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On en déduit que : $n^4 \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}} \right) = \dfrac{1}{6} + o_{+\infty}(1)$

Conclusion. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^4 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1}{6}$

—— Problème 1 — Dérivée n-ème de la fonction arctangente ——

Problématique. *Le but de ce problème est d'établir une formule générale donnant les dérivées successives de la fonction arctangente, en étudiant notamment une très jolie suite de polynômes.*

Tout au long de ce problème, f désigne la fonction arctangente : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x)$

Partie 1 — Questions préliminaires

1/ Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Pour tout réel x tel que $|x| < \dfrac{\pi}{2}$, on a : $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

2/ Etablir que pour tout réel x on a : $\qquad \cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Soit x un réel. Observons que $|\arctan(x)| < \dfrac{\pi}{2}$ (cours). On peut donc utiliser la formule de la question précédente pour écrire :

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

Partie 2 — Dérivées successives de f

3/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \; f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $A(n)$: $\exists\, P_n \in \mathbb{R}[X], \; \forall\, x \in \mathbb{R}, \; f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$

Initialisation. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{P_1(x)}{1+x^2}$ en ayant posé $P_1 = 1$.

D'où $A(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $A(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Selon l'hypothèse de récurrence : $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.

D'où : $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(1+x^2)^n P_n{}'(x) - 2nx(1+x^2)^{n-1}P_n(x)}{(1+x^2)^{2n}} = \dfrac{(1+x^2)P_n{}'(x) - 2nxP_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$

Ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \; f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ en ayant posé : $P_{n+1} = (1+X^2)P_n{}' - 2nXP_n$.

Après avoir observé que $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ (hypothèses + propriétés générales des polynômes), on en déduit que $A(n+1)$ est vraie.

Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \; \exists\, P_n \in \mathbb{R}[X], \; \forall\, x \in \mathbb{R}, \; f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$

Jusqu'à la fin de ce problème, on note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie ci-dessus.

On pourra admettre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = (1+X^2){P_n}' - 2nXP_n$

4/ Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que :

$$P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, notons $A(n)$: $\exists\, Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X],\ P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n$

Initialisation. Pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ d'où $f^{(2)}(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

On en déduit que : $P_2 = -2X$. En particulier : $P_2 = (-1)^{2-1}\, 2! X^{2-1} + Q_2$, avec $Q_2 = \tilde{0} \in \mathbb{R}_0[X]$.

D'où $A(2)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $A(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$.
D'après la question 3 : $\quad P_{n+1} = (1+X^2){P_n}' - 2nXP_n$.

Et par hypothèse de récurrence : $P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n$ avec $\deg(Q_n) \leqslant n-2$.

On en déduit que :

$$P_{n+1} = (1+X^2)\left((-1)^{n-1}\, n!(n-1)X^{n-2} + {Q_n}'\right) - 2nX\left((-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n\right)$$

$$\iff P_{n+1} = (-1)^{n-1}\, n!(n-1)X^n + (-1)^{n-1}\, n!(n-1)X^{n-2} + (1+X^2){Q_n}' - 2n(-1)^{n-1}\, n! X^n - 2nXQ_n$$

$$\iff P_{n+1} = (-1)^{n-1}\, n!(n-1-2n)X^n + (-1)^{n-1}\, n!(n-1)X^{n-2} + (1+X^2){Q_n}' - 2nXQ_n$$

$$\iff P_{n+1} = (-1)^{n}\,(n+1)! X^n + Q_{n+1} \text{ avec } Q_{n+1} = (-1)^{n-1}\, n!(n-1)X^{n-2} + (1+X^2){Q_n}' - 2nXQ_n$$

Il reste à observer que $\deg(Q_{n+1}) \leqslant n-1$, conséquence de l'hypothèse de récurrence et des propriétés du degré.

On a ainsi prouvé que : $\exists\, Q_{n+1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P_{n+1} = (-1)^{n}\,(n+1)! X^n + Q_{n+1}$

Récurrence établie.

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \exists\, Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X],\ P_n = (-1)^{n-1}\, n! X^{n-1} + Q_n$

5/ Déduire de la question précédente le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout entier $n \geqslant 2$.

Un repos bien mérité. **Conclusion.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \deg(P_n) = n-1$ et $\quad \mathrm{cd}(P_n) = (-1)^{n-1}\, n!$

Partie 2 — Racines de P_n

Dans cette partie, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$.

Dans ce contexte, on **admet** que $f^{(n)}$ s'annule en $(n-1)$ réels deux à deux distincts.

6/ Etablir que P_n possède exactement $(n-1)$ racines réelles deux à deux distinctes.

Par construction : $\forall\, x \in \mathbb{R},\; f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$. Ainsi : $f^{(n)}(x) = 0 \Longleftrightarrow P_n(x) = 0$.

Selon l'énoncé, $f^{(n)}$ s'annule en $(n-1)$ réels deux à deux distincts.

On en déduit que P_n s'annule en $(n-1)$ réels deux à deux distincts.

Or selon la question précédente : $\deg(P_n) = n-1$.

Le polynôme P_n est de degré $(n-1)$, et possède $(n-1)$ racines réelles deux à deux distinctes ; ce sont donc les seules (et elles sont toutes simples).

Conclusion. P_n possède exactement $(n-1)$ racines réelles simples.

7/ Etablir par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\; f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $A(n)$: $\forall\, x \in \mathbb{R},\; f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Initialisation. Soit x un réel. D'une part : $f^{(1)}(x) = f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

D'autre part : $(1-1)!\cos^1(f(x))\sin\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos^2(f(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$ d'après la question 2.

D'où $A(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $A(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit x un réel.

Par hypothèse de récurrence : $\quad f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

D'où : $f^{(n+1)}(x) = (n-1)!\left[-nf'(x)\sin(f(x))\cos^{n-1}(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\right]$

$$+(n-1)!nf'(x)\cos^n(f(x))\cos\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{n!\,\cos^{n-1}(f(x))}{1+x^2}\left[-\sin(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)+\cos(f(x))\cos\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{n!\,\cos^{n-1}(f(x))}{1+x^2}\cos\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)+f(x)\right)$$

$$= \frac{n!\,\cos^{n-1}(f(x))}{1+x^2}\cos\left((n+1)\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{n!\,\cos^{n-1}(f(x))}{1+x^2}\sin\left((n+1)\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Puisque $\cos^2(f(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$ selon la question 2, on en déduit que :

$$f^{(n+1)}(x) = n!\,\cos^{n-1}(f(x))\cos^2(f(x))\sin\left((n+1)\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow f^{(n+1)}(x) = n!\,\cos^{n+1}(f(x))\sin\left((n+1)\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

8/ Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(f(x)) > 0$.

Pour tout réel x on a : $|\arctan(x)| < \dfrac{\pi}{2}$. La fonction arctan étant strictement positive sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on peut conclure.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(f(x)) > 0$

9/ A l'aide des questions précédentes, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f^{(n)}(x) = 0$.

Soit x un réel. D'après les 2 questions précédentes : $f^{(n)}(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$

Or : $\sin\left(n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$

$$\Longleftrightarrow n\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad [\pi]$$

$$\Longleftrightarrow f(x)+\frac{\pi}{2} = 0 \quad \left[\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \left[\frac{\pi}{n}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ f(x) = \frac{(2k-n)\pi}{2n}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![\, 1, n-1 \,]\!],\ f(x) = \frac{(2k-n)\pi}{2n} \qquad (\text{car } f(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![\, 1, n-1 \,]\!],\ x = \tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)$$

Conclusion. $\left[f^{(n)}(x) = 0\right] \Longleftrightarrow \left[\exists k \in [\![\, 1, n-1 \,]\!],\ x = \tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)\right]$

10/ En déduire la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P_n.

D'après les questions 5 et 9, P_n est un polynôme de coefficient dominant $(-1)^{n-1}n!$, de degré $n-1$, possèdant exactement $n-1$ racines données explicitement par la formule de la question précédente.

Conclusion. $P_n = (-1)^{n-1}\,n!\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)\right)$

Problème 2 — Sur les racines n-èmes de id_E

Problématique. *L'objet de ce problème est l'étude de quelques endomorphismes particuliers, appelés endomorphismes **itempotents**. Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est itempotent s'il existe un entier naturel non nul n tel que $u^n = \mathrm{id}_E$; dans ce sens, u est une racine n-ème de l'identité de E.*

Cet énoncé est partagé en quatre parties : les deux premières sont consacrées à l'étude de deux cas particuliers (avec $n = 2$ et $n = 3$). *

La troisième partie a pour objet une propriété générale des racines cubiques de l'identité d'un espace vectoriel, et généralise la seconde.

La dernière partie étend le résultat de la troisième partie aux racines n-èmes de l'identité, avec n un entier quelconque.

Partie 1 — Etude d'un exemple avec $n = 2$

Dans cette partie, $\mathbf{E}_1$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_2[X]$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathbf{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonique de $\mathbf{E}_1$.

On note : $\quad P_1 = X(X-1)\,; \quad P_2 = X(X-2)\,; \quad$ et $\quad P_3 = (X-1)(X-2)$.

Enfin, on note : $\quad F = \mathrm{Vect}\,(P_1, P_2) \quad$ et $\quad G = \mathrm{Vect}(P_3)$.

1/ Etablir que $\mathbf{B'} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \tilde{0}$.

Alors : $\alpha_1 X(X-1) + \alpha_2 X(X-2) + \alpha_3 (X-1)(X-2) = \tilde{0}$

Par évaluation en 0, on en déduit : $\alpha_3 = 0$. D'où : $\alpha_1 X(X-1) + \alpha_2 X(X-2) = \tilde{0}$

Par évaluation en 1, on en déduit : $\alpha_2 = 0$. D'où : $\alpha_1 X(X-1) = \tilde{0}$. D'où : $\alpha_1 = 0$

Ainsi : $\left[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = \tilde{0}\right] \Longrightarrow [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0]$. Ce qui prouve que la famille $\mathbf{B'}$ est libre.

Donc $\mathbf{B'}$ est une famille libre de $\mathbf{E}_1$, telle que $\mathrm{Card}(\mathbf{B'}) = \dim \mathbf{E}_1$.

Conclusion. $\mathbf{B'}$ est une base de $\mathbf{E}_1$.

2/ Etablir que : $\quad \mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

D'après la question précédente, $\mathbf{B'}$ est génératrice de $\mathbf{E}_1$. D'où :

$$\mathbf{E}_1 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{Vect}(P_1, P_2) + \mathrm{Vect}(P_3) = F + G \quad (\spadesuit)$$

En outre, il est clair que $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$. Or selon le T4D : $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F + G \quad (\clubsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\dim F \cap G = 0$. D'où : $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0}_{\mathbf{E}_1} \right\}$.

Conclusion. On a prouvé que : $\mathbf{E}_1 = F + G$ et $F \cap G = \left\{ \overrightarrow{0}_{\mathbf{E}_1} \right\}$. Donc : $\mathbf{E}_1 = F \bigoplus G$.

---

*. Et vous ne manquerez pas d'observer que la première contient un nombre tout-à-fait indécent d'applications directes du cours : elle représente à ce titre une importante source de points faciles à prendre.

3/ Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{BB'}}$ de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B'}$. †

On a : $P_1 = X^2 - X$; $P_2 = X^2 - 2X$; et $P_3 = X^2 - 3X + 2$.

D'après le cours : $P_{\mathbf{BB'}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4/ **Etude d'une symétrie**. On note s_F la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On rappelle que s_F est un endomorphisme de $\mathbf{E}_1$.

a/ Etablir que : $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$

On a : $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = s_F^2 - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}$. Or $s_F^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}$ (par définition de S_F).

Conclusion. $(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \circ (s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E}_1)}$

b/ Justifier brièvement que : $\forall\, Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

La famille $\mathbf{B'} = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbf{E}_1$. Tout polynôme Q de $\mathbf{E}_1$ admet donc un unique triplet de coordonnées dans cette base.

Conclusion. $\forall\, Q \in \mathbf{E}_1,\ \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

c/ Calculer $s_F(P_1)$, $s_F(P_2)$ et $s_F(P_3)$.

Puisque P_1 et P_2 appartiennent à F, on a $s_F(P_1) = P_1$ et $s_F(P_2) = P_2$.

Puisque P_3 appartient à G, on a $S_F(P_3) = -P_3$.

Conclusion. $s_F(P_1) = P_1$; $s_F(P_2) = P_2$ et $s_F(P_3) = -P_3$

d/ Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. A l'aide de la question précédente, calculer : $s_F\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3\right)$.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$. Par linéarité de S_F et d'après la question précédente, on a :

$$s_F\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3\right) = \alpha_1 s(P_1) + \alpha_2 s(P_2) + \alpha_3 s(P_3) = P_1 + P_2 - P_3$$

Conclusion. $\forall\, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3,\ s_F\left(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3\right) = P_1 + P_2 - P_3$

e/ Montrer que $\ker(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 2 ; et que $\ker(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1})$ est un sev de $\mathbf{E}_1$, de dimension 1.

Soit $Q \in \mathbf{E}_1$. D'après la question 4-b : $\exists!\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$

On a : $Q \in \ker(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \Longleftrightarrow s_F(Q) = Q \Longleftrightarrow \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 \Longleftrightarrow \alpha_3 = 0$ (la dernière équivalence provenant de l'unicité des coordonnées d'un polynôme dans la base $\mathbf{B'}$).

Ainsi : $Q \in \ker(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) \Longleftrightarrow \exists!\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2, \quad Q = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \Longleftrightarrow Q \in F$

D'où : $\ker(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = F$ et $\dim \ker(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}) = 2$ (F est engendré par 2 vecteurs, qui constituent une famille libre car extraite d'une base).

†. Cette question a un unique intérêt : rapporter un point à tout.e étudiant.e qui sait traiter cette question de cours. La matrice $P_{\mathbf{BB'}}$ ne sera pas réutilisée dans la suite du problème.

Par ailleurs on a :

$$Q \in \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \Longleftrightarrow s_F(Q) = -Q \Longleftrightarrow \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3 = -\alpha_1 P_1 - \alpha_2 P_2 - \alpha_3 P_3$$
$$\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

(la dernière équivalence provenant de l'unicité des coordonnées d'un polynôme dans la base **B'**).

Ainsi : $Q \in \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \Longleftrightarrow \exists\,!\,\alpha_3 \in \mathbb{K},\quad Q = \alpha_3 P_3 \Longleftrightarrow Q \in G$

D'où : $\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = G$ et $\dim\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 1$ (G est engendré par 1 vecteur non nul).

Conclusion. $\ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = F$ et $\dim\ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 2$; $\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = G$ et $\dim\ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) = 1$.

Remarque : à l'issue de cette partie, on peut observer que : $\mathbf{E}_1 = \ker\left(s_F + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right) \bigoplus \ker\left(s_F - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_1}\right)$

Partie 2 — Etude d'un exemple avec $n = 3$

Dans cette partie, on note $\mathbf{E}_2 = \mathbb{C}_2[X]$, et on considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{E}_2 &\longrightarrow \mathbf{E}_2 \\ aX^2 + bX + c &\longmapsto a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c \end{aligned} \qquad \text{avec } \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$

Il revient au même de dire que l'application f envoie le polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(\mathrm{j}X)$.

5/ Etablir que f est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

Soient P et Q dans $\mathbf{E}_2$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(\mathrm{j}X) = \lambda P(\mathrm{j}X) + \mu Q(\mathrm{j}X) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Ce qui prouve que f est linéaire ; puisque de plus f est définie sur $\mathbf{E}_2$ et à valeurs dans $\mathbf{E}_2$, on peut conclure.

Conclusion. f est un endomorphisme de $\mathbf{E}_2$.

6/ Etablir que : $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

Pour tout polynôme $P \in \mathbf{E}_2$ on a :

$$f^3(P) = f^2(f(P)) = f^2(P(\mathrm{j}X)) = f(f(P(\mathrm{j}X))) = f\left(P(\mathrm{j}^2X)\right) = P(\mathrm{j}^3X) = P(X)$$

Conclusion. $f^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}$

7/ Montrer que $\ker\left(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right)$ est le sev de $\mathbf{E}_2$ constitué des polynômes constants.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{E}_2$. On a :

$$P \in \ker\left(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) \Longleftrightarrow f(P) = P \Longleftrightarrow a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c = aX^2 + bX + c \Longleftrightarrow a = b = 0$$

Ainsi : $P \in \ker\left(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) \Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{C},\ P = c \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(1)$.

Conclusion. $\ker\left(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) = \mathrm{Vect}(1)$

8/ Pour tout $P \in \mathbf{E}_2$, calculer $f^2(P) + f(P) + P$. En déduire que : $\ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{E}_2$. On a :

$$f^2(P) + f(P) + P = \left(a\mathrm{j}X^2 + b\mathrm{j}^2X + c\right) + \left(a\mathrm{j}^2X^2 + b\mathrm{j}X + c\right) + \left(aX^2 + bX + c\right)$$

$$= a\left(\underbrace{1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2}_{=0}\right)X^2 + b\left(\underbrace{1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2}_{=0}\right)X + 3c$$

Ainsi : $f^2(P) + f(P) + P = 3c$.

On en déduit que :

$$P \in \ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) \Longleftrightarrow \exists\,(a, b) \in \mathbb{C}^2,\ P = aX^2 + bX$$

Conclusion. $\ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$

Remarque : à l'issue de cette partie, on peut observer que : $\mathbf{E}_2 = \ker\left(f^2 + f + \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right) \bigoplus \ker\left(f - \mathrm{id}_{\mathbf{E}_2}\right)$

Partie 3 — Cas général avec $n = 3$

Dans cette partie, on revient au cas général où $\mathbf{E}$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère un endomorphisme φ de $\mathbf{E}$, tel que : $\varphi^3 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.

9/ Etablir que : $\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})} = \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

On a : $\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = \varphi^3 + \varphi^2 + \varphi - \varphi^2 - \varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}} = \varphi^3 - \mathrm{id}_{\mathbf{E}} = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}$ (d'après l'énoncé)

De même : $\left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = \varphi^3 + \varphi^2 + \varphi - \varphi^2 - \varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}} = \varphi^3 - \mathrm{id}_{\mathbf{E}} = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}$

Conclusion. $\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})} = \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

10/ Effectuer la division euclidienne de $X^2 + X + 1$ par $X - 1$.

Un calcul sans difficulté donne : $X^2 + X + 1 = (X - 1)(X + 2) + 3$.

11/ A l'aide de la question précédente, établir que :

$$\frac{1}{3}\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) - \frac{1}{3}\left(\varphi + 2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$$

D'après la question précédente : $\dfrac{1}{3}\left(X^2 + X + 1\right) - \dfrac{1}{3}\left(X + 2\right)\left(X - 1\right) = 1$

D'où : $\dfrac{1}{3}\left(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) - \dfrac{1}{3}\left(\varphi + 2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) \circ \left(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.

12/ En déduire que : $\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\cap\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)=\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}}\right\}$

Soit $\overrightarrow{v}\in\mathbf{E}$. D'après la question précédente, on a :

$$\overrightarrow{v}=\frac{1}{3}\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)-\frac{1}{3}\left(\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)\right)\qquad(\spadesuit)$$

Supposons que $\overrightarrow{v}\in\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\cap\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$.

D'une part : $\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}$

D'autre part : $\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}$. D'où : $\left(\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)\right)=\overrightarrow{0}$ par linéarité de $\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.

On déduit des 2 lignes précédentes et de $(\spadesuit)$ que : $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.

Conclusion. $\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\cap\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)=\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}}\right\}$

13/ Etablir que : $\mathbf{E}=\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\bigoplus\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

Soit $\overrightarrow{v}\in\mathbf{E}$. D'après la question 11 :

$$\overrightarrow{v}=\frac{1}{3}\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)-\frac{1}{3}\left(\left(\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\circ\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\right)\left(\overrightarrow{v}\right)$$

Notons : $\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{3}\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)$ et $\overrightarrow{w}=-\dfrac{1}{3}\left(\left(\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\circ\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\right)\left(\overrightarrow{v}\right)$

Avec cette notation :

- $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$

- $\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{u}\right)=\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\dfrac{1}{3}\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)\right)=\dfrac{1}{3}\left(\underbrace{\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\circ\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)}_{=0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}\text{ d'après 9}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)$

  Ainsi : $\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{0}$. D'où : $\overrightarrow{u}\in\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

- $\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{w}\right)=\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\left(\left(\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\circ\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\right)\left(\overrightarrow{v}\right)\right)$

$$=-\frac{1}{3}\left(\left(\varphi+2\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\circ\underbrace{\left(\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\circ\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\right)}_{=0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}\text{ d'après 9}}\right)\left(\overrightarrow{v}\right)$$

  Ainsi : $\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\left(\overrightarrow{w}\right)=\overrightarrow{0}$. D'où : $\overrightarrow{w}\in\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

On a prouvé que : $\forall\,\overrightarrow{v}\in\mathbf{E},\ \exists\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)\in\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\times\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right),\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$.

Il s'ensuit que : $\mathbf{E}=\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)+\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$.

Conclusion. $\mathbf{E}=\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)+\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$ et $\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\cap\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)=\left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}}\right\}$
Par caractérisation des sev supplémentaires : $\mathbf{E}=\ker\left(\varphi^2+\varphi+\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)\bigoplus\ker\left(\varphi-\mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

Partie 4 — Cas général avec $n \geqslant 2$ arbitraire

Dans cette partie, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$, et $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On considère un endomorphisme ψ de $\mathbf{E}$, tel que : $\psi^n = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.

14/ Etablir que : $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}$

On a : $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \psi^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\psi^{k+1} - \psi^k\right) = \psi^n - \mathrm{id}_{\mathbf{E}} = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}$

(puisque selon l'énoncé : $\psi^n = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$)

Conclusion. $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}$

15/ Justifier qu'il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$Q_1(\psi) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) + Q_2(\psi) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$$

Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun à $(X-1)$ et $R = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

Puisque $(X-1)$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, D est constant ou associé à $(X-1)$.

Supposons que D soit associé à $(X-1)$. Alors D possède 1 comme racine, et divise le polynôme R. Or 1 n'est pas racine de R : contradiction.

Il s'ensuit que les seuls diviseurs communs à $X-1$ et R sont les polynômes constants non nuls. Ce qui signifie que $X-1$ et R sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout dans $\mathbb{K}[X]$, il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$Q_1 \times R + Q_2 \times (X-1) = 1$$

d'où :

$$Q_1(\psi) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) + Q_2(\psi) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$$

Conclusion. $\exists\,(Q_1, Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2,\ Q_1(\psi) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) + Q_2(\psi) \circ (\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$

16/ Etablir que :

$$\mathbf{E} = \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right) \bigoplus \ker\left(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$$

Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbf{E}$. D'après la question précédente :

$$\overrightarrow{v} = \left(Q_1(\psi)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\right)(\overrightarrow{v}) + \left(Q_2(\psi)\circ(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\right)(\overrightarrow{v}) \quad (\spadesuit)$$

➢ <u>Déterminons</u> $\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\cap\ker\left(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$.

D'après $(\spadesuit)$: $\overrightarrow{v} = Q_1(\psi)\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)(\overrightarrow{v})\right) + Q_2(\psi)\left((\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})(\overrightarrow{v})\right)$

Soit $\overrightarrow{v} \in \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\cap\ker\left(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$. Alors :

$$(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0} \text{ et } Q_1(\psi)\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)(\overrightarrow{v})\right) = \overrightarrow{0}$$

On en déduit, avec $(\spadesuit)$, que : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. D'où : $\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\cap\ker\left(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

➢ Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbf{E}$. D'après $(\spadesuit)$:

$$\overrightarrow{v} = \left(Q_1(\psi)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\right)(\overrightarrow{v}) + \left(Q_2(\psi)\circ(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\right)(\overrightarrow{v})$$

Notons : $\overrightarrow{u} = \left(Q_1(\psi)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\right)(\overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{w} = \left(Q_2(\psi)\circ(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\right)(\overrightarrow{v})$

Avec cette notation :

- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$
- $(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})(\overrightarrow{u}) = \left[(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\circ\left(Q_1(\psi)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\right)\right](\overrightarrow{v})$

$$= \left[Q_1(\psi)\circ\underbrace{\left((\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1}\psi^k\right)\right)}_{=0_{\mathscr{L}(\mathbf{E})}\text{ d'après q14}}\right](\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$$

D'où : $\overrightarrow{u} \in \ker\left(\psi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}\right)$

➤ On vérifie de même que : $\overrightarrow{w} \in \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right)$

On a prouvé que : $\forall \overrightarrow{v} \in \mathbf{E},\ \exists\,(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) \in \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) \times \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right),\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$.

Il s'ensuit que : $\mathbf{E} = \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) + \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})$.

Conclusion. $\mathbf{E} = \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) + \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})$ et $\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \cap \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}}) = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbf{E}}\right\}$

Par caractérisation des sev supplémentaires : $\mathbf{E} = \ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \psi^k\right) \bigoplus \ker(\varphi - \mathrm{id}_{\mathbf{E}})$