EXERCICES 23 BIS — PROBABILITÉS

EXERCICE 1. — PROBABILITÉS

Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$, et que Y suit la loi uniforme $\mathscr{U}\left(\llbracket -1, 1 \rrbracket\right)$.

1/ Quelle est la variance de X ?

2/ On suppose que X et Y sont indépendantes, et on pose $Z = X + Y$.

a/ Justifier que : $P(Z=0) = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{9}{16} + \dfrac{6}{16}\right)$

b/ Déterminer la loi de probabilité de Z.

PROBLÈME 1. — PROCESSUS DE MARKOV À 3 POSITIONS

Une impulsion se propage toutes les secondes entre trois positions A, B et C.
Notons A_n (*resp.* B_n, C_n) l'évènement "être en A (*resp.* en B, en C) à l'instant n", et notons encore :

$$a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n) \text{ et } c_n = P(C_n).$$

On sait que si à la seconde n,

- l'impulsion est arrivée en A, la probabilité pour qu'elle se transmette en B est de $3/4$, et pour qu'elle se transmette en C est de $1/4$;
- l'impulsion est arrivée en B, la probabilité pour qu'elle se transmette en A est de $3/4$, et pour qu'elle se transmette en C est de $1/4$;
- l'impulsion est arrivée en C, elle se transmet en B,

à la seconde $n+1$.
De plus, on suppose qu'initialement (à la seconde 0), l'impulsion est en A.

PARTIE A – Préambule.

1/ Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{3}{4} b_n \\[2ex] b_{n+1} = \dfrac{3}{4} a_n + c_n \\[2ex] c_{n+1} = \dfrac{1}{4} a_n + \dfrac{1}{4} b_n \end{cases}$

2/ **Programmation en Python**. Ecrire un script en Python demandant à l'utilisateur de saisir un entier n, et qui affiche les valeurs de a_n, b_n et c_n.

3/ Justifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad c_n = 1 - a_n - b_n$

4/ Etablir à l'aide de la question précédente qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et un vecteur $B \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera tels que :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + B}$$

✍ **Notation** : dans la suite du problème, on notera $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. La formule ci-dessus pourra donc être écrite

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = AV_n + B$$

L'objectif principal du problème est d'étudier la suite de vecteurs (V_n), et en particulier sa convergence.

Partie B – Recherche d'une éventuelle limite.

5/ Calculer $(\mathrm{I}_2 - A)$. Sans calculer son inverse, justifier que $(\mathrm{I}_2 - A)$ est inversible.

6/ On pose : $L = (\mathrm{I}_2 - A)^{-1}\, B$.
Sans calculer explicitement L, établir que : $L = AL + B$.

7/ Calculer explicitement L, et vérifier que : $L = \begin{pmatrix} 12/35 \\ 16/35 \end{pmatrix}$

Partie C – Etude d'une suite auxiliaire.

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_n = V_n - L$

8/ Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+1} = AW_n$

9/ Etablir par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad W_n = A^n W_0$

Partie D – Calcul de A^n et conclusion

10/ On pose : $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

11/ Calculer $P^{-1}AP$.

✍ **Notation** : dans la suite du problème, on notera $D = P^{-1}AP$.

12/ Calculer A^n pour tout entier naturel n.

13/ En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

14/ En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$; puis $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.