PBS 11 - Vacances d'avril

Exercice 1 — (Algèbre linéaire).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et $f \in \mathscr{L}(E)$.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$K_n = \ker(f^n) \qquad \text{et} \qquad I_n = \operatorname{im}(f^n)$$

1. Montrer que la suite $(K_n)_n$ est croissante, et que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

2. On suppose qu'il existe un entier p tel que $K_{p+1} = K_p$. Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $K_{p+q} = K_p$.

3. On suppose à présent que E est de dimension finie. Etablir que la suite $(K_n)_n$ est stationnaire.

4. Donner un exemple d'endomorphisme f pour lequel la suite $(K_n)_n$ est strictement croissante.

Exercice 2 — (Algèbre linéaire).

Partie I — Une base de $\mathbb{K}^3$

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^3$, on note $\mathbf{B} = \left(\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique.

1. On considère la famille de vecteurs $\mathbf{B'} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ où les vecteurs $\overrightarrow{v_i}$ sont respectivement définis par :

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}\,; \qquad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \qquad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$$

Montrer que $\mathbf{B'}$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

2. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathbf{BB'}}$ de la base $\mathbf{B}$ à la base $\mathbf{B'}$.

Dans la suite du problème, on notera simplement P la matrice $P_{\mathbf{BB'}}$.

3. Justifier brièvement que P est inversible, et calculer P^{-1}.

4. Soient x, y et z trois réels arbitraires. On pose : $\overrightarrow{V} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{V}$ dans la base $\mathbf{B'}$.

Partie II — Généralités sur le commutant d'une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul, et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice arbitraire.

5. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto MA - AM \end{aligned}$$

est un endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

6. Rappelons que l'on note $\mathrm{COM}(A)$ et que l'on appelle **commutant** de A, l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $MA = AM$.

Montrer que $\mathrm{COM}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Soit $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On pose $B = Q^{-1}AQ$.

a. Soit $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $N = Q^{-1}MQ$. Montrer que : $[AM = MA] \Longleftrightarrow [NB = BN]$.

b. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Delta : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto Q^{-1}MQ \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Remarque : *on pourra admettre que Δ est linéaire.*

c. On note désormais

$$\begin{aligned} \delta : \mathrm{COM}(B) &\longrightarrow \mathrm{COM}(A) \\ N &\longmapsto QNQ^{-1} \end{aligned}$$

Etablir que δ est un isomorphisme. Que peut-on en déduire pour $\mathrm{COM}(A)$ et $\mathrm{COM}(B)$?

Partie III — Application

Dans cette partie, on note :

- ➤ A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 9 & -4 \end{pmatrix}$;
- ➤ P la matrice $P_{\mathbf{BB'}}$ de la partie I ;
- ➤ D la matrice $P^{-1}AP$; on admet que $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Expliciter $\mathrm{COM}(D)$. En particulier, en déterminer une base ainsi que sa dimension.

9. A l'aide de la question précédente et de la partie II, déterminer une base et la dimension de $\mathrm{COM}(A)$. *

*. Il ne sera pas indispensable d'expliciter les 9 coefficients de chacune des matrices de la base de $\mathrm{COM}(A)$.

EXERCICE 3 — (PROBABILITÉS).

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges, et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire ;

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P_F(E)$ ou $P\left(E|F\right)$) par :

$$P_F(E) = P\left(E|F\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

PARTIE I — PRÉLIMINAIRES

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Calculer $P\left(X_2 = 1|X_1 = 1\right)$ et $P\left(X_2 = 1|X_1 = 0\right)$. En déduire la loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

PARTIE II — LOI DE X_n

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![\, b, n + b \,]\!]$, calculer $P\left(X_{n+1} = 1|S_n = k\right)$.

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{b + r + n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III — Loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ à l'aide des évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8. Montrer que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P\left(S_{n+1} = k | S_n = \ell\right)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \quad \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii) \quad \ell = k-1, \qquad (iii) \quad \ell = k$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k)$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.