MPSI – Colle 25 (du 13 au 17 mai 2024) : Probabilités

Chapitre 22 : Probabilités et variables aléatoires réelles

*Tout au long de ce chapitre, on se place dans la situation où l'univers de l'expérience aléatoire est **fini**.*

1 – Expérience aléatoire et univers

Définitions d'**expérience aléatoire**, d'**issue** (ou **éventualité**). L'**univers** (souvent noté Ω) d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues. Un **évènement** est une partie de l'univers. L'**évènement certain** (*resp.* **impossible**) est Ω (*resp.* $\emptyset$).

2 – Opérations sur les évènements pour A et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, définitions de $\bar{A}$ (évènement **contraire** de A), $A \cup B$ (**union** des évènements A et B), $A \cap B$ (**intersection** des évènements A et B) ; faire le lien avec les définitions déjà rencontrées en début d'année dans le cadre de la théorie des ensembles. Deux évènements A et B sont **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Définition : soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Un **système complet d'évènements** (en abrégé SCE ; on dit aussi **partition**) est une famille $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ d'évènements deux à deux disjoints tels que $\displaystyle\bigcup_{i=1,\dots,n} A_i = \Omega$.

Exemple fondamental : pour tout évènement A, la famille $\left(A, \bar{A}\right)$ est un système complet d'évènements.

3 – Probabilités

Définition : une **probabilité** $\mathbb{P}$ sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; et si A et B sont deux parties disjointes de Ω, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Remarque : *il résulte de la définition que pour tout évènement A, le réel $P(A)$ est compris entre* 0 *et* 1.

Propriétés : 1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; 2) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; 3) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarque : *le point-clef de la démonstration du 3) est* $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Théorème (formule des probabilités totales) : si A est un évènement, et $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements, alors : $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i)$.

Cas important d'application : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right)$.

Situation d'équiprobabilité : notons $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, et notons pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$. Dans le cas particulier où chaque p_i est égal à $1/n$, on parle alors d'**équiprobabilité**. Dans cette situation, on a pour tout évènement $A : \mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ (où card A désigne le **cardinal** de A, c'est-à-dire son nombre d'éléments) ; cette formule correspond au quotient "nombre de cas favorables / nombre de cas possibles".

4 – Probabilités conditionnelles et évènements indépendants

Définition : soient A et B deux évènements, avec $P(A) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A (c-à-d sachant que A est réalisé) est $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$.

Remarque : *il résulte de la définition que* $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$.

Propriétés : 1) Pour tout évènement p(A) neq 0 $B : \mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$. 2) Pour tout couple (B_1, B_2) d'évènements : $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$.

Définition : deux évènements A et B sont **indépendants** lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Lorsque c'est le cas, on a : $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.

Théorème (formule des probabilités totales, revisitée) : soit A un évènement, et soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Remarque : *cette formule justifie la méthode consistant à calculer des probabilités à l'aide d'un arbre pondéré, où l'on "ajoute les probas correspondant aux différents chemins, et où l'on multiplie les probas correspondant aux branches successives".*

Cas important d'application : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\bar{B}}(A) \times \mathbb{P}\left(\bar{B}\right)$

5 – Variables aléatoires réelles

Définition : un **espace probabilisé** est un couple $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Définition : une **variable aléatoire réelle** X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple : gain lors d'un jeu.

➤ Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition : soit X une VAR. L'**espérance mathématique** de X, notée $E(X)$ est le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) \text{ (ou } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(X = \omega))$$

<u>Remarque</u> : dans le cas où Ω est fini, on peut noter $x_1, \ldots, x_n$ les différentes valeurs prises par X, et $p_1, \ldots, p_n$ les probabilités correspondantes. Avec ces notations, l'espérance de X est le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

<u>Remarque</u> : *on dit souvent espérance pour désigner l'espérance mathématique de X. De plus, l'espérance est également appelée* ***valeur moyenne*** *de X.*

Propriétés de l'espérance : soient X et Y deux VAR sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors : 1) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$; 2) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

➤ Variance d'une variable aléatoire réelle

Définition : soit X une VAR. La **variance de** X est le réel noté $V(X)$ et défini en posant

$$V(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})(X(\omega) - E(X))^2 \text{ (ou } V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p_i).$$

Théorème (formule de Koenig-Huygens) : avec les mêmes notations que ci-dessus, $V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$.

Propriété (inégalité de Markov) : soit X une VAR positive. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ a\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant E(X).$$

Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : soit X une VAR. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

6 – Variables aléatoires réelles : lois usuelles

a – Loi uniforme

Définition : soient m et n deux entiers naturels, avec $n < m$. Une VAR X suit la **loi uniforme sur** $[\![n, m]\!]$ si X peut prendre toutes les valeurs de $[\![n, m]\!]$ avec la probabilité $1/(m - n + 1)$.

b – Loi de Bernoulli

Définition : une VAR X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si X peut prendre les valeurs 1 et 0 avec les probabilités respectives p et $1 - p$.

Si tel est le cas, on a : $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

c – Loi binomiale

Définition : soient n un entier naturel et p un réel de $[0; 1]$. Une VAR. X suit la **loi binomiale de taille** n **et de paramètre** p (X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$) si X est la somme de n VAR <u>indépendantes</u> suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.
Il revient alors au même de dire que X est égale au nombre de succès au cours de n expériences indépendantes ne pouvant conduire qu'à deux issues : "succès" avec la probabilité p, ou "échec" avec la probabilité $(1-p)$.

Théorème : X suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$ alors

$$\forall k \in [\![0; n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

<u>Remarque</u> : *dans ce cadre, on obtient $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$ comme conséquence du binôme de Newton (vérifiez que vous savez le justifier !).*

Théorème : si X suit la loi binomiale de taille n et de paramètre p, alors : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p) = npq$ (avec $q = 1 - p$).

Questions de cours

- **Propriété** : Si A et B sont deux évènements d'un univers Ω, alors : $\mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ <u>et</u> $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$

- **(Propriétés des probabilités)** Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

  1/ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

  2/ Pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

  3/ Pour tout couple (A, B) d'évènements de $\mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

- **Théorème (formule des probabilités totales)** : soit A un évènement, et soit $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

- **Théorème (formule de Koenig-Huygens)** : soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est fini. On a : $V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$.

- **Propriétés de l'espérance et de la variance** Soit X une VAR, et soient a et b deux réels. On a : $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

- **Propriété** ***(espérance de la loi binomiale)*** : si X suit la loi binomiale $B(n,p)$, alors $E(X) = np$.