Colle 26 – Questions de cours

Question de cours 1. — Théorème du rang. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On a : $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$

Preuve. Puisque $\ker f$ est un sev de E, et que E est de dimension finie, $\ker f$ admet un supplémentaire S dans E. En d'autres termes, il existe un sev S de E tel que : $E = \ker f \bigoplus S$. On définit alors une application :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : S &\longrightarrow \operatorname{Im} f \\ \overrightarrow{v} &\longmapsto f(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

En premier lieu, observons que $\widetilde{f}$ est bien définie (càd à valeurs dans $\operatorname{Im} f$), linéaire (car f l'est).

➤ Montrons que $\widetilde{f}$ est injective : soit $\overrightarrow{v} \in S$. Si $\overrightarrow{v} \in \ker \widetilde{f}$, alors : $\widetilde{f}(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. D'où : $\overrightarrow{v} \in \ker(f) \cap S$. Or $\ker(f) \cap S = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ puisque $E = \ker(f) \bigoplus S$. Donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Ce qui prouve que : $\ker \widetilde{f} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Donc $\widetilde{f}$ est injective.

➤ Montrons que $\widetilde{f}$ est surjective : soit $\overrightarrow{w} \in \operatorname{Im} f$. Il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que : $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ $(\spadesuit)$.

Par ailleurs, comme $E = \ker f \bigoplus S$: $\exists!\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \in \ker f \times S,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{s}$ $(\heartsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$: $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{s}) = \underbrace{f(\overrightarrow{u})}_{=\overrightarrow{0_F}} + f(\overrightarrow{s})$ d'où $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{s})$, et comme $s \in S$, $\overrightarrow{w} = \widetilde{f}(\overrightarrow{s})$.

En résumé : $\forall \overrightarrow{w} \in \operatorname{Im} f,\ \exists \overrightarrow{s} \in S,\ \overrightarrow{w} = \widetilde{f}(\overrightarrow{s})$. Ce qui signifie que $\widetilde{f}$ est surjective.

➤ Il s'ensuit que $\widetilde{f}$ est un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im} f$. D'où en particulier : $\boxed{\dim S = \dim \operatorname{Im} f}$.

➤ D'autre part, on déduit de $E = \ker f \bigoplus S$ la relation : $\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim S}$.

De ces deux égalités entre dimensions, on déduit enfin : $\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f}$.

Question de cours 2. — Corollaire. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$ (un endomorphisme de E). LASSE :

1/ f est injectif.

2/ f est surjectif.

3/ f est un automorphisme de E.

Preuve. Notons $n = \dim E$, et observons que selon le théorème du rang : $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$ $(\spadesuit)$

➤ 1) $\Longrightarrow$ 2) : si f est injectif, alors $\ker f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ donc $\dim \ker f = 0$ d'où grâce à $(\spadesuit)$: $\dim \operatorname{Im} f = n$. Donc $\operatorname{Im} f = E$ et f est donc surjectif.

➤ 2) $\Longrightarrow$ 3) : si f est surjectif, alors $\operatorname{Im} f = E$ donc $\dim \operatorname{Im} f = n$ d'où grâce à $(\spadesuit)$: $\dim \ker f = 0$. Donc $\ker f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ et f est donc injectif, d'où f est un automorphisme.

➤ 3) $\Longrightarrow$ 1) : trivial.

➤ Conclusion : 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1) donc : $\boxed{1) \Longleftrightarrow 2) \Longleftrightarrow 3)}$.

Question de cours 3. — **Propriété**. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Si g est un isomorphisme, alors

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$$

Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche avec un isomorphisme.

Preuve. Sous les hypothèses et avec les notations de l'énoncé, posons $p = \mathrm{rg}(f)$.
Par définition : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$, et on doit établir que : $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Introduisons l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : \mathrm{Im} f &\longrightarrow \mathrm{Im}\,(g \circ f) \\ \overrightarrow{v} &\longmapsto g(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

L'application $\widetilde{g}$ est bien définie (car g est définie sur F, et $\mathrm{Im} f$ est un sev de F), linéaire (car g l'est, et que la restriction d'une application linéaire l'est !), et injective (car g l'est, et que la restriction d'une application injective l'est !).

Montrons la surjectivité de g : soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$. Il existe $\overrightarrow{v} \in E$, $\overrightarrow{w} = (g \circ f)(\overrightarrow{v})$. D'où : $\overrightarrow{w} = g(f(\overrightarrow{v}))$. Puisque $f(\overrightarrow{v}) \in \mathrm{Im} f$, on peut écrire : $\overrightarrow{w} = \widetilde{g}(f(\overrightarrow{v}))$. Ce qui prouve la surjectivité de $\widetilde{g}$.

On en déduit que $\widetilde{g}$ est un isomorphisme entre $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$. D'où : $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Conclusion. Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$
Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche avec un isomorphisme.

Remarque. De manière analogue, on peut montrer que **le rang d'une application linéaire est invariant par composition à droite avec un isomorphisme** : si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}\,(f \circ g) = \mathrm{rg}(f)$.

Question de cours 4. — **Pack formes linéaires**. **Propriété** : toute forme linéaire est nulle ou surjective) + (**Propriété** : le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan) + (**Application** : l'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan).

Preuve. ➤ Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire sur E. L'image de φ est un sev de $\mathbb{K}$; or $\dim(\mathbb{K}) = 1$. Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$ (auquel cas φ est nulle) ou $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ (auquel cas φ est surjective).

➤ Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle sur E. Il résulte de ce qui précède que φ est surjective. D'après le théorème du rang, on a alors : $\dim(E) = 1 + \dim(\ker \varphi)$. Par suite : $\dim(\ker \varphi) = \dim E - 1$, ce qui signifie que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

➤ L'application $\mathrm{tr} : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire sur E (résultat établi dans le chapitre de calcul matriciel), non nulle (par exemple car $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$). D'après le résultat précédent, le sev des matrices de trace nulle dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (donc un sev de dimension $n^2 - 1$).

Question de cours 5. — **Théorème**. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 1$, et soit H un sev de E. Alors : [H est un hyperplan de E] SSI [il existe $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, $f \neq 0$ telle que $H = \ker f$].

Preuve. ➤ Sens direct ($\Longrightarrow$) : soit H un hyperplan de E. Puisque H est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (égale à $n-1$), il admet une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v_i})_{i \in [\![1,n-1]\!]}$, qui est en particulier une famille libre de vecteurs de E.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in E \backslash H$ tel que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{w})$ est une base de E.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\overrightarrow{v} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \overrightarrow{v_i}\right) + \beta \overrightarrow{w}$.

On définit alors la forme linéaire suivante (qui à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de E associe sa dernière coordonnée dans la base $\mathscr{B}'$) :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overrightarrow{v} &\longmapsto \beta \end{aligned}$$

Il résulte de la définition de φ que : $H = \ker \varphi$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : [H \text{ est un hyperplan de } E] \Longrightarrow [\text{il existe } f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f]}$

➤ Réciproquement ($\Longleftarrow$) : supposons qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, $f \neq 0$ telle que $H = \ker f$. Puisque f est une forme linéaire non nulle, elle est surjective, donc de rang 1. En vertu du théorème du rang, on a donc : $\dim \ker f = n - 1$. Donc $H = \ker f$ est un hyperplan de E.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : [\text{il existe } f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f] \Longrightarrow [H \text{ est un hyperplan de } E]}$

➤ Finalement : $\boxed{[\text{il existe } f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f] \Longleftrightarrow [H \text{ est un hyperplan de } E]}$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a : $\dfrac{4}{\pi}\, x \leqslant \arctan x \leqslant x$

Exercice 2. — **Inégalité arithmético-géométrique**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ on a :

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 3. — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Etablir que :

$$[f \text{ est convexe et concave}] \Longleftrightarrow [f \text{ est affine}]$$

Exercice 4. — Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction continue et strictement croissante. Etablir que f est convexe si et seulement si sa bijection réciproque f^{-1} est concave.

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P - P' + P'' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\left[\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Im} f\right] \Longleftrightarrow \left[\ker\left(f^2\right) = \ker f\right]$$

Exercice 7. — On considère l'endomorphisme : $\begin{aligned} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A - \operatorname{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{aligned}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.