

Chapitre 24 : Fonctions convexes

1 – Généralités

2 – Propriétés

3 – Convexité et dérivée

Pour f dérivable, f est convexe SSI f' croissante.

Pour f de classe $\mathcal{C}^2$, f convexe SSI f'' positive.

Inégalité arithmético-géométrique.

Chapitre 25 : Applications linéaires entre ev de dim. finie

1 – Rang d'une famille, rang d'une application linéaire

Définition : soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . On appelle **rang de la famille** $\mathcal{F}$ la dimension du sev de E engendré par $\mathcal{F}$.

Notation : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$

Définition : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le **rang de** f est la dimension de l'image de f . On le note : $\text{rg}(f) = \dim \text{Im} f$.

Propriétés : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1/ $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$

2/ $[\text{rg}(f) = \dim F] \iff [f \text{ est surjective}]$

2 – Le théorème du rang et ses conséquences

Théorème du rang : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a : $\dim E = \dim \ker f + \text{rg} f$.

Corollaire 1 : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie ($\dim E = \dim F$), et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. LASSE :

1/ f est injective. 2/ f est surjective. 3/ f est un isomorphisme.

Corollaire 2 : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E). LASSE :

1/ f est injective.

2/ f est surjective.

3/ f est un automorphisme de E .

3 – Formes linéaires et hyperplans

a – Formes linéaires

Définition : soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Une **forme linéaire sur** E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$).

Notation. $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (espace vectoriel dual de E).

b – Correspondance entre formes linéaires et hyperplans

Propriété : soient E un $\mathbb{K}$ -ev, et f une forme linéaire sur E . Si f n'est pas nulle, alors f est surjective.

Propriété : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et f une forme linéaire non nulle sur E . Alors $\ker f$ est un hyperplan de E .

Théorème : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$, et soit H un sev de E . LASSE :

1/ H est un hyperplan de E ;

2/ il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $f \neq 0$ (forme linéaire sur E non nulle) tq $H = \ker f$.

Selon ce théorème, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire ; mais pour un hyperplan donné, on n'a pas unicité de cette forme, comme le précise l'énoncé suivant.

Propriété : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$. Deux formes linéaires ont même noyau SSI elles sont proportionnelles. En d'autres termes, pour f et g dans E^* , on a : $[\ker f = \ker g] \iff [\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, g = \lambda f]$.

Pour un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, on a ainsi une correspondance bijective entre les hyperplans de E et les formes linéaires non nulles définies à une constante multiplicative près.

Théorème (généralisation) : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$, et soit F un sev de dimension r . Alors F est l'intersection de $n - r$ hyperplans.

Plus explicitement, il existe $n - r$ formes linéaires non nulles $(f_i)_{i \in [1, n-r]}$ sur E

telles que : $F = \bigcap_{i=1}^{n-r} \ker f_i$.

4 – Matrice d'une application linéaire

a – Généralités

Définition : Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, de dimensions respectives p et n ; $f \in \mathcal{L}(E, F)$; $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$ une base de E ; et $\mathcal{B}' = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ une base de F . La **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** , notée $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est la matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$ suivante : $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, où les scalaires α_{ij}

sont caractérisés par : $\forall j \in [1, p], f(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \vec{w}_i$

Traduction : la matrice de f est obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des images par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Notation : lorsque f est un endomorphisme de E , et que $\mathcal{B}$ est une base de E , on note simplement $M_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Propriété : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, de dimensions respectives p et n ; $f \in \mathcal{L}(E, F)$; $\mathcal{B}$ une base de E , et $\mathcal{B}'$ une base de F . Soit $\vec{v}$ un vecteur de E , dont on note $X_{\mathcal{B}}$ le p -uplet des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note encore $Y_{\mathcal{B}'}$ le n -uplet des coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors : $Y_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) X_{\mathcal{B}}$
b – Propriétés générales

Propriété (linéarité) : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev, de dimensions respectives p et n ; $\mathcal{B}$ une base de E , et $\mathcal{B}'$ une base de F . Soient f et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, soient λ et μ deux scalaires :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f + \mu g) = \lambda M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mu M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$$

Propriété : mêmes notations que ci-dessus. L'application

$$\psi : \mathcal{L}(E, F) \longmapsto M_{np}(\mathbb{K})$$

$$f \longmapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

est un isomorphisme.

Corollaire : si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Propriété : soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -ev, de bases respectives $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$; soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \times M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

Propriété : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension, de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$; et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est un isomorphisme de E de F SSI sa matrice dans toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ (de E et F respectivement) est inversible.

Corollaire : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , et $f \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E). Alors : $[f \in \text{GL}(E)] \iff [M_{\mathcal{B}}(f) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})]$ ($\mathcal{B}$ désignant une base quelconque de E).

En outre, si $f \in \text{GL}(E)$, on a : $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (M_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

QUESTIONS DE COURS

► **Théorème du rang** : soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a : $\dim E = \dim \ker f + \text{rg } f$

► **Corollaire** : soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E). LASSE :

1/ f est injective.

2/ f est surjective.

3/ f est un automorphisme de E .

► **Propriété** : soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Si g est un isomorphisme, alors

$$\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$$

► **Pack formes linéaires** : (**Propriété** : toute forme linéaire est nulle ou surjective) + (**Propriété** : le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan) + (**Application** : l'ensemble des matrices de trace nulle dans $M_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan).

► **Théorème** : soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \geq 1$, et soit H un sev de E . Alors : $[H \text{ est un hyperplan de } E] \text{ SSI } [\text{il existe } f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f]$.