Colle 26 – Questions de cours

Question de cours 1. — Théorème du rang. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
On a : $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$

Preuve. Puisque $\ker f$ est un sev de E, et que E est de dimension finie, $\ker f$ admet un supplémentaire S dans E. En d'autres termes, il existe un sev S de E tel que : $E = \ker f \bigoplus S$. On définit alors une application :

$$\widetilde{f} : S \longrightarrow \operatorname{Im} f$$
$$\overrightarrow{v} \longmapsto f(\overrightarrow{v})$$

En premier lieu, observons que $\widetilde{f}$ est bien définie (càd à valeurs dans $\operatorname{Im} f$), linéaire (car f l'est).

➤ Montrons que $\widetilde{f}$ est injective : soit $\overrightarrow{v} \in S$. Si $\overrightarrow{v} \in \ker \widetilde{f}$, alors : $\widetilde{f}(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. D'où : $\overrightarrow{v} \in \ker(f) \cap S$. Or $\ker(f) \cap S = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ puisque $E = \ker(f) \bigoplus S$. Donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Ce qui prouve que : $\ker \widetilde{f} = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Donc $\widetilde{f}$ est injective.

➤ Montrons que $\widetilde{f}$ est surjective : soit $\overrightarrow{w} \in \operatorname{Im} f$. Il existe $\overrightarrow{v} \in E$ tel que : $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$ $(\spadesuit)$.

Par ailleurs, comme $E = \ker f \bigoplus S$: $\exists !\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \in \ker f \times S,\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{s}$ $(\heartsuit)$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\heartsuit)$: $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{s}) = \underbrace{f(\overrightarrow{u})}_{=\overrightarrow{0_F}} + f(\overrightarrow{s})$ d'où $\overrightarrow{w} = f(\overrightarrow{s})$, et comme $s \in S$, $\overrightarrow{w} = \widetilde{f}(\overrightarrow{s})$.

En résumé : $\forall \overrightarrow{w} \in \operatorname{Im} f,\ \exists \overrightarrow{s} \in S,\ \overrightarrow{w} = \widetilde{f}(\overrightarrow{s})$. Ce qui signifie que $\widetilde{f}$ est surjective.

➤ Il s'ensuit que $\widetilde{f}$ est un isomorphisme entre S et $\operatorname{Im} f$. D'où en particulier : $\boxed{\dim S = \dim \operatorname{Im} f}$.

➤ D'autre part, on déduit de $E = \ker f \bigoplus S$ la relation : $\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim S}$.

De ces deux égalités entre dimensions, on déduit enfin : $\boxed{\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f}$.

Question de cours 2. — Corollaire. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$ (un endomorphisme de E). LASSE :

1/ f est injectif.

2/ f est surjectif.

3/ f est un automorphisme de E.

Preuve. Notons $n = \dim E$, et observons que selon le théorème du rang : $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \quad (\spadesuit)$

➤ 1) $\Longrightarrow$ 2) : si f est injectif, alors $\ker f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ donc $\dim \ker f = 0$ d'où grâce à $(\spadesuit)$: $\dim \operatorname{Im} f = n$. Donc $\operatorname{Im} f = E$ et f est donc surjectif.

➤ 2) $\Longrightarrow$ 3) : si f est surjectif, alors $\operatorname{Im} f = E$ donc $\dim \operatorname{Im} f = n$ d'où grâce à $(\spadesuit)$: $\dim \ker f = 0$. Donc $\ker f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ et f est donc injectif, d'où f est un automorphisme.

➤ 3) $\Longrightarrow$ 1) : trivial.

➤ Conclusion : 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1) donc : $\boxed{1) \Longleftrightarrow 2) \Longleftrightarrow 3)}$.

Question de cours 3. — **Propriété**. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Si g est un isomorphisme, alors

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$$

Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche avec un isomorphisme.

Preuve. Sous les hypothèses et avec les notations de l'énoncé, posons $p = \mathrm{rg}(f)$.
Par définition : $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$, et on doit établir que : $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Introduisons l'application :

$$\begin{aligned} \widetilde{g} : \mathrm{Im} f &\longrightarrow \mathrm{Im}\,(g \circ f) \\ \overrightarrow{v} &\longmapsto g\,(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

L'application $\widetilde{g}$ est bien définie (car g est définie sur F, et $\mathrm{Im} f$ est un sev de F), linéaire (car g l'est, et que la restriction d'une application linéaire l'est !), et injective (car g l'est, et que la restriction d'une application injective l'est !).

Montrons la surjectivité de g : soit $\overrightarrow{w} \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$. Il existe $\overrightarrow{v} \in E$, $\overrightarrow{w} = (g \circ f)(\overrightarrow{v})$. D'où : $\overrightarrow{w} = g(f(\overrightarrow{v}))$. Puisque $f(\overrightarrow{v}) \in \mathrm{Im} f$, on peut écrire : $\overrightarrow{w} = \widetilde{g}(f(\overrightarrow{v}))$. Ce qui prouve la surjectivité de $\widetilde{g}$.

On en déduit que $\widetilde{g}$ est un isomorphisme entre $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$. D'où : $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im}(g \circ f)$.

Conclusion. Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}\,(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$

Le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche avec un isomorphisme.

Remarque. De manière analogue, on peut montrer que **le rang d'une application linéaire est invariant par composition à droite avec un isomorphisme** : si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}\,(f \circ g) = \mathrm{rg}(f)$.

Question de cours 4. — **Pack formes linéaires**. **Propriété** : toute forme linéaire est nulle ou surjective) + (**Propriété** : le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan) + (**Application** : l'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan).

Preuve. ➤ Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire sur E. L'image de φ est un sev de $\mathbb{K}$; or $\dim(\mathbb{K}) = 1$. Il s'ensuit que $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$ (auquel cas φ est nulle) ou $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ (auquel cas φ est surjective).

➤ Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non nulle sur E. Il résulte de ce qui précède que φ est surjective. D'après le théorème du rang, on a alors : $\dim(E) = 1 + \dim(\ker \varphi)$. Par suite : $\dim(\ker \varphi) = \dim E - 1$, ce qui signifie que $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.

➤ L'application $\mathrm{tr} : M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{tr}(M)$ est une forme linéaire sur E (résultat établi dans le chapitre de calcul matriciel), non nulle (par exemple car $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$). D'après le résultat précédent, le sev des matrices de trace nulle dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ (donc un sev de dimension $n^2 - 1$).

Question de cours 5. — **Théorème**. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 1$, et soit H un sev de E. Alors : [H est un hyperplan de E] SSI [il existe $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, $f \neq 0$ telle que $H = \ker f$].

Preuve. ➤ Sens direct ($\Longrightarrow$) : soit H un hyperplan de E. Puisque H est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie (égale à $n-1$), il admet une base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v_i})_{i \in [\![1,n-1]\!]}$, qui est en particulier une famille libre de vecteurs de E.

D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur $\overrightarrow{w} \in E \backslash H$ tel que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}, \overrightarrow{w})$ est une base de E.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $\overrightarrow{v} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \overrightarrow{v_i}\right) + \beta \overrightarrow{w}$.

On définit alors la forme linéaire suivante (qui à un vecteur $\overrightarrow{v}$ de E associe sa dernière coordonnée dans la base $\mathscr{B}'$) :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overrightarrow{v} &\longmapsto \beta \end{aligned}$$

Il résulte de la définition de φ que : $H = \ker \varphi$.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : [H \text{ est un hyperplan de } E] \Longrightarrow [\text{il existe } f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f]}$

➤ Réciproquement ($\Longleftarrow$) : supposons qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, $f \neq 0$ telle que $H = \ker f$. Puisque f est une forme linéaire non nulle, elle est surjective, donc de rang 1. En vertu du théorème du rang, on a donc : $\dim \ker f = n - 1$. Donc $H = \ker f$ est un hyperplan de E.

$\boxed{\textbf{Conclusion} : [\text{il existe } f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f] \Longrightarrow [H \text{ est un hyperplan de } E]}$

➤ Finalement : $\boxed{[\text{il existe } f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K}),\ f \neq 0 \text{ telle que } H = \ker f] \Longleftrightarrow [H \text{ est un hyperplan de } E]}$.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a : $\dfrac{4}{\pi}\, x \leqslant \arctan x \leqslant x$

Exercice 2. — **Inégalité arithmético-géométrique**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ on a :

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 3. — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Etablir que :

$$[f \text{ est convexe et concave}] \iff [f \text{ est affine}]$$

Exercice 4. — Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction continue et strictement croissante. Etablir que f est convexe si et seulement si sa bijection réciproque f^{-1} est concave.

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P - P' + P'' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\left[\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Im} f\right] \iff \left[\ker\left(f^2\right) = \ker f\right]$$

Exercice 7. — On considère l'endomorphisme : $\begin{aligned} f : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A - \operatorname{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{aligned}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Banque d'exercices - Corrigés

Exercice 1. — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a : $\dfrac{4}{\pi}x \leqslant \arctan x \leqslant x$

Selon les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

En outre, pour tout réel x on a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Il est alors clair que f'' est négative sur $\mathbb{R}_+$: la fonction arctan est donc concave sur $\mathbb{R}_+$.

Il s'ensuit que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est située en-dessous (*resp.* au-dessus) de toutes ses tangentes (*resp.* cordes) sur $\mathbb{R}_+$.

Il reste à observer que la droite d'équation $y = x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, et que la droite d'équation $y = \dfrac{4}{\pi}x$ est la corde joignant les 2 points de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(0, 0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$, pour conclure :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad \frac{4}{\pi}x \leqslant \arctan x \leqslant x$$

Exercice 2. — **Inégalité arithmético-géométrique**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ on a :

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Dans le cas où l'un des réels x_i est nul, l'inégalité est immédiate.

Supposons dorénavant que les réels x_i sont strictement positifs. On a :

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x_1 \ldots x_n)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i)}{n}\right)$$

Or, la fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \exp(y_i)$$

pour tout n-uplet de réels $(y_1, \ldots, y_n)$, et pour tout n-uplet de réels dans $[0, 1]$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

En appliquant cette propriété avec $y_i = \ln(x_i)$ et $\lambda_i = \dfrac{1}{n}$, on obtient :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i)}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\exp(\ln(x_i))$$

soit finalement : $\displaystyle\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i)}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$.

Conclusion. Pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ on a : $\quad (x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$

Exercice 3. — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Etablir que :

$$[f \text{ est convexe et concave}] \Longleftrightarrow [f \text{ est affine}]$$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et à valeurs réelles. Si f est convexe est concave sur I, alors f'' est positive et négative, donc nulle, sur I.

Ainsi : $\forall\, x \in I,\ f''(x) = 0$

$$\Longrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in I,\ f'(x) = a$$

$$\Longrightarrow \exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, x \in I,\ f(x) = ax + b$$

D'où : $[f$ est convexe et concave sur $I] \Longrightarrow [f$ est affine$]$. La réciproque est immédiate.

Conclusion. $[f$ est convexe et concave$] \Longleftrightarrow [f$ est affine$]$

Exercice 4. — Soit $f : I \longrightarrow f(I)$ une fonction continue et strictement croissante. Etablir que f est convexe si et seulement si sa bijection réciproque f^{-1} est concave.

Sous les hypothèses de l'énoncé, f est convexe, bijective et strictement croissante. Il s'ensuit que f^{-1} est strictement croissante.

Soient y_1 et y_2 deux réels de $f(I)$, et $\lambda \in]0,1[$. Alors : $\exists!\, (x_1, x_2) \in I^2,\ y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ (on peut aussi noter que : $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

La fonction f étant convexe par hypothèse :

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geqslant f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right)$$

d'où, f^{-1} étant strictement croissante :

$$f^{-1}\left(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\right) \geqslant f^{-1}\left(f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right)\right)$$

soit finalement :

$$f^{-1}\left(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2\right) \geqslant \lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda) f^{-1}(y_2)$$

En résumé, on a prouvé que :

$$\forall\, (y_1, y_2) \in \left(f(I)\right)^2,\ \forall\, \lambda \in [0,1],\ f^{-1}\left(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2\right) \geqslant \lambda f^{-1}(y_1) + (1-\lambda) f^{-1}(y_2)$$

D'où f^{-1} est concave.

Il s'ensuit que : $[f$ convexe$] \Longrightarrow \left[f^{-1} \text{ concave}\right]$

En changeant le signe de la première inégalité du raisonnement ci-dessus, on obtient l'implication :

$$[f \text{ concave}] \Longrightarrow \left[f^{-1} \text{ convexe}\right]$$

En appliquant à f^{-1} cette dernière implication, et en observant que $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$, on obtient :

$$\left[f^{-1} \text{ concave}\right] \Longrightarrow [f \text{ convexe}]$$

Ce qui achève la preuve de l'équivalence de l'énoncé.

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé : $[f$ convexe$] \Longleftrightarrow \left[f^{-1} \text{ concave}\right]$

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P - P' + P''$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Selon les propriétés du degré, si P est dans $\mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. L'application f est donc bien définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Prouvons la linéarité de f. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q) - (\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q)''$$

$$\Longrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q - \lambda P' - \mu Q' + \lambda P'' + \mu Q'' \quad \textit{(par linéarité de la dérivation dans } \mathbb{R}_n[X]\textit{)}$$

$$\Longrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P - P' + P'') + \mu(Q - Q' + Q'')$$

$$\Longrightarrow f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

Ce qui prouve la linéarité de f. Ainsi : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

$\triangle\triangle\triangle$ Prouvons l'injectivité de f. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$P \in \ker f \Longleftrightarrow f(P) = \widetilde{0} \Longleftrightarrow P - P' + P'' = \widetilde{0} \Longleftrightarrow P = P' - P'' \Longleftrightarrow P = \widetilde{0}$$

(la dernière équivalence s'obtenant par comparaison des degrés des deux termes de l'égalité $P = P' - P''$)

On en déduit que : $\ker f = \left\{\widetilde{0}\right\}$. L'endomorphisme f est donc injectif.

Conclusion. f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension finie : donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 1 — Preuve alternative, en prouvant la surjectivité à partir de $\triangle\triangle\triangle$.

$\triangle\triangle\triangle$ Prouvons la surjectivité de f. Selon le cours :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left(f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\right)$$

Or : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg\left(f(X^k))\right) = k$.

Il s'ensuit que la famille $\mathscr{F} = \{f(1), f(X), \ldots, f(X^n)\}$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$; elle est donc libre. Puisqu'en outre $\mathrm{Card}\mathscr{F} = \dim \mathbb{R}_n[X]$, la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On en déduit que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathbb{R}_n[X]$. Ce qui prouve la surjectivité de f.

Conclusion. f est un endomorphisme surjectif de $\mathbb{R}_n[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension finie : donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 2. Lors de la colle, une seule version suffira !

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\left[\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\mathrm{Im}f\right] \Longleftrightarrow \left[\ker\left(f^2\right)=\ker f\right]$$

➤ Par le biais d'une double application du théorème du rang, on a :

$$\dim E=\dim\ker f+\mathrm{rg}f \qquad \text{et} \qquad \dim E=\dim\ker f^2+\mathrm{rg}f^2$$

D'où :

$$\dim\ker f-\dim\ker f^2=\mathrm{rg}f^2-\mathrm{rg}f \qquad (\spadesuit)$$

➤ Par ailleurs, on a deux inclusions : $\ker f\subset\ker f^2 \quad (\clubsuit) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}f^2\subset\mathrm{Im}f \quad (\heartsuit)$

Prouvons $(\clubsuit)$: soit $\overrightarrow{v}\in E$. On a : $\overrightarrow{v}\in\ker f\Longrightarrow f\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}\Longrightarrow f\left(f\left(\overrightarrow{v}\right)\right)=\overrightarrow{0}\Longrightarrow\overrightarrow{v}\in\ker f^2$

D'où : $\ker f\subset\ker f^2$

Prouvons $(\heartsuit)$: soit $\overrightarrow{v}\in E$. On a :

$$\overrightarrow{v}\in\mathrm{Im}f^2\Longrightarrow\exists\,\overrightarrow{u}\in E,\ \overrightarrow{v}=f^2\left(\overrightarrow{u}\right)\Longrightarrow\exists\,\overrightarrow{u}\in E,\ \overrightarrow{v}=f\left(f\left(\overrightarrow{u}\right)\right)\Longrightarrow\overrightarrow{v}\in\mathrm{Im}f$$

D'où $\mathrm{Im}f^2\subset\mathrm{Im}f$

➤ Supposons que : $\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\mathrm{Im}f$. Alors : $\dim\ker f=\dim\ker f^2$ (d'après $(\spadesuit)$).

Puisque de plus $\ker f\subset\ker f^2$ (d'après $(\clubsuit)$), on en déduit que : $\ker f=\ker f^2$.

Ce qui prouve l'implication : $\left[\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\mathrm{Im}f\right]\Longrightarrow\left[\ker\left(f^2\right)=\ker f\right]$

➤ Supposons que : $\ker\left(f^2\right)=\ker f$. Alors : $\mathrm{rg}f=\mathrm{rg}f^2$ (d'après $(\spadesuit)$).

Puisque de plus $\mathrm{Im}f^2\subset\mathrm{Im}f$ (d'après $(\heartsuit)$), on en déduit que : $\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2$.

Ce qui prouve l'implication : $\left[\ker\left(f^2\right)=\ker f\right]\Longrightarrow\left[\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\mathrm{Im}f\right]$

Conclusion. Sous les hypothèses de l'énoncé : $\left[\mathrm{Im}\left(f^2\right)=\mathrm{Im}f\right]\Longleftrightarrow\left[\ker\left(f^2\right)=\ker f\right]$

Exercice 7. — On considère l'endomorphisme : $f:\begin{array}{ccc}\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R})\\ A & \longmapsto & A-\mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2\end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique $B=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Des calculs aisés donnent : $f(E_{11})=-E_{22}$; $f(E_{12})=E_{12}$; $f(E_{21})=E_{21}$ et $f(E_{22})=-E_{11}$

On en déduit que la matrice de f dans la base B est : $M_B(f)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$

Remarque 1. On peut se convaincre assez facilement que la matrice $M_B(f)$ est inversible. Il s'ensuit que f est un automorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, on peut observer que : $M_B(f)^2=\mathrm{I}_4$.

D'après le cours récent, on peut en déduire que : $M_B\left(f^2\right)=\mathrm{I}_4$.

D'après le cours récent encore une fois, on peut en déduire que : $f^2=\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$. D'où f est une involution.

D'après le DS10, f étant une racine carrée de l'identité, on a : $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})=\ker\left(f-\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)\bigoplus\ker\left(f+\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)$.

On peut d'ailleurs observer que E_{12} et E_{21} sont laissés invariants par f (voir les positions des 1 sur la diagonale de $M_B(f)$). Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}(E_{12},E_{21})\subset\ker\left(f-\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)$.

Une exploitation à peine plus judicieuse de la première et de la dernière colonnes permet d'affirmer dans un premier temps que : $E_{11}+E_{22}\in\ker\left(f+\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)$; et dans un second temps $E_{11}-E_{22}\in\ker\left(f-\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)$.

On déduit alors de ce qui précède que $\ker\left(f-\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)=\mathrm{Vect}(E_{12},E_{21},E_{11}-E_{22})$ est un hyperplan (H) de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$; et $\ker\left(f-\mathrm{id}_{\mathrm{M}_2(\mathbb{R})}\right)=\mathrm{Vect}(E_{11}+E_{22})$ est une droite vectorielle (D) de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que f est la symétrie par rapport à H, parallèlement à D.

Remarque 2. La première motivation de l'exercice est de donner un exemple de construction d'une matrice d'application linéaire.

La seconde est de montrer que les propriétés "visuelles" de la matrice fournissent rapidement des propriétés de l'application linéaire qu'elle représente : vous ne verrez jamais plus les matrices comme avant ! ! !