Exercices 25 — Applications linéaires en dimension finie

Rang d'une application linéaire

Exercice 1. — 1/ Soit $f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $(x,y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$. On admet que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3\right)$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

2/ Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $P \longmapsto P - X^2P''$. On admet que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_3[X]\right)$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

3/ Soit $f : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, $A \longmapsto A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2$. On admet que $f \in \mathscr{L}\left(\mathrm{M}_2(\mathbb{K})\right)$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 2. — **(Forme linéaire)**.

1/ **Exemple 1**. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto x+y+z$. On admet que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

2/ **Exemple 2**. Soit $f : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}$, $P \longmapsto P''(1)$. On admet que f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_3[X]$.

Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

3/ **Exemple 3**. Soit f l'application définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}),\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+b+c+d$$

On admet que f est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

Exercice 3. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], \quad P \longmapsto P - P' + P''$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (on pourra admettre que f est linéaire).

Exercice 4. — Dans cet exercice, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{2024}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2024.
On note $G = \mathrm{Vect}(X^{450} + X^7 - 1)$ le sev de E engendré par le polynôme $Q = X^{450} + X^7 - 1$.
Enfin, on note F la partie de E suivante : $F = \{P \in E \,/\, P(0) = P(1)\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Préciser la dimension de F.

2) Etablir que $E = F \bigoplus G$.

3) On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Quel est le rang de p_F ?

Exercice 5. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$\left[\mathrm{im}\left(f^2\right) = \mathrm{im} f\right] \Longleftrightarrow \left[\ker\left(f^2\right) = \ker f\right]$$

Exercice 6. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :
$$[E = \ker f \bigoplus \mathrm{im} f] \Longleftrightarrow [E = \ker f + \mathrm{im} f]$$

Exercice 7. — Soit n un entier naturel non nul. On note $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$.
A tout polynôme P de E, on associe l'élément noté $f(P)$ de $\mathbb{K}^{2n+2}$ défini par :
$$f(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(n), P'(0), P'(1), \ldots, P'(n))$$
Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :
$$f(Q) = (1, 2, \ldots, 2n+2)$$

Exercice 8. — (e3a MP 2017). Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les applications
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \Delta : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$
On admet que φ et Δ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

1/ Déterminer le rang de Δ.

2/ Etablir que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3/ A l'aide de la question précédente :

a/ Etablir qu'il existe une unique famille de polynômes S_0, S_1,..., S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi(S_i) = \frac{1}{i!} X^i$$
b/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{S_0, \ldots, S_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4/ Dans cette question, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$. Etablir que :
$$(\mathrm{id} - \Delta) \circ (\mathrm{id} + \Delta + \cdots + \Delta^n) = \mathrm{id}$$
5/ En déduire l'expression de S_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Matrice d'une application linéaire

Exercice 9. — On considère l'endomorphisme : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 10. — On considère l'application linéaire : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y - z, y - z - t, x - z) \end{array}$

Ecrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Exercice 11. — On considère l'endomorphisme : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + 4z, y + 3z, z) \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. — On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{rcl} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 13. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer "sans calculs" l'image et le noyau de f.

Exercice 14. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer "sans calculs" l'image et le noyau de f.

Exercice 15. — On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ canoniquement associé à la matrice C.

En d'autres termes, C est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, à savoir $B = \left(1, X, X^2, X^3\right)$.

1/ A l'aide de la matrice C, déterminer $g(X)$, $g\left(X^2\right)$ et $g(1+X)$.

2/ Calculer le rang de g.

3/ Déterminer une base de $\mathrm{im} g$, puis une base de $\ker g$.

Rang d'une matrice / Rang d'une application linéaire

Exercice 16. — Calculer le rang des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17. — Calculer le rang des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \\ a & a \end{pmatrix}$ (a et b scalaires qcques)

Exercice 18. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1/ Déterminer le rang de f. En déduire la dimension de $\ker f$.

2/ Déterminer une base de $\mathrm{im} f$, puis une base de $\ker f$.

Exercice 19. — On considère l'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (9x-4y,\ 12x-5y) \end{array}$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1/ Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2/ Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donner l'expression de l'automorphisme réciproque f^{-1}.

3/ On considère à présent la famille $B' = (u, v)$, où u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées dans la base canonique : $u = (1, 2)$ et $v = (2, 3)$.

a/ Justifier que B' est une base de $\mathbb{R}^2$.

b/ Ecrire la matrice de passage de la base B à la base B'. Dans la suite de l'exercice, on pourra noter P cette matrice.

c/ Calculer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base B' (on vérifiera que A' est une matrice diagonale).

d/ Calculer pour tout entier naturel n la matrice A'^n ; puis la matrice A^n.

Exercice 20. — On note $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et id l'identité de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour f ?

2/ Déterminer $\ker(f - \mathrm{id})$, ainsi que sa dimension. Vérifier que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ appartient à ce sous-espace vectoriel.

3/ On pose : $\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_3}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4/ Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Calculer P^{-1}.

5/ Soit A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

a/ Après avoir rappelé la relation liant les matrices A et A', calculer A'.

b/ Pour tout entier naturel n, déterminer A^n.

Une nouvelle méthode pour le calcul du rang

Le rang d'une matrice peut en général être deviné facilement lorsque cette matrice est carrée de taille 2 ou 3. Néanmoins, pour des matrices de taille supérieure, ce n'est pas toujours une opération aussi évidente, et il est un peu lourd de systématiquement revenir à la caractérisation de famille libre pour déterminer si les colonnes d'une telle matrice sont liées ou non.

Une méthode alternative pour calculer le rang d'une matrice consiste à rendre cette matrice triangulaire supérieure, exactement comme nous l'avons décrit dans l'algorithme du pivot de Gauss : le rang de la matrice obtenue sera alors égal au nombre de coefficients non nuls sur la "diagonale".

Les opérations laissant invariant le rang d'une matrice sont les suivantes :

- multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire non nul ;
- permutation de colonnes (ou de lignes) ;
- somme de deux colonnes (ou de deux lignes).

Ci-dessous, quatre exemples illustrant cette méthode :

➣ Exemple 1

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = 3$

➣ Exemple 2

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$

➣ Exemple 3

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

➣ Exemple 4

Calculer le rang de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Exercice 21. — En vous inspirant des exemples précédents, déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

3/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $\alpha \in \mathbb{K}$)

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (avec a, b et $c \in \mathbb{K}$)

Exercice 22. — Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$.

1/ Déterminer le rang de M en fonction de m.

2/ Dans cette question, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice M.
On suppose en outre que : $m = 1$.

a/ Préciser le rang de f, ainsi que la dimension du noyau de f.

b/ Déterminer une base de l'image de f, ainsi qu'une base de son noyau.

c/ $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 23. — **(Calcul du rang)**. Calculer le rang de chacune des matrices suivantes.

1/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4/ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5/ $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6/ $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7/ $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quelques exercices de synthèse sur l'algèbre linéaire

Exercice 24. — **(Existence d'un polynôme annulateur, question de cours classique).**

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit u un endomorphisme de u.

Etablir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 25. — **(Oral Centrale PSI).** Soit n un entier naturel $\geqslant 5$. Etablir qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que :

$$P + XP'' = X^n - 5X^4 + 1$$

Exercice 26. — Une propriété des endomorphismes nilpotents. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle. On note : $n = \dim E$.

Soit f un endomorphisme non nul et nilpotent de E ; on suppose donc qu'il existe un entier naturel $m \geqslant 2$ tel que $f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

L'objectif de cette question est d'établir que : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1/ Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2/ Montrer qu'il existe un vecteur V de E tel que la famille : $\left\{V, f(V), f^2(V), \ldots, f^{p-1}(V)\right\}$ est libre.

Indication : utiliser le fait que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3/ En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Remarque. La traduction matricielle de cette propriété sera qu'une matrice nilpotente A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiera nécessairement (au pire) $A^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 27. — (Extrait de Concours)

Dans ce problème, on note $\mathrm{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note également : $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

➤ **Partie A - Etude d'un endomorphisme**.

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto (2X+1)P - \left(X^2 - 1\right)P'$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1/ Ecrire la matrice $A = \mathrm{M}_{\mathrm{B}}(f)$ de f dans la base B.

2/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

3/ Etablir que l'équation

$$(\mathrm{E}) : \qquad P + P' = X^2 P' - 2XP$$

admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme nul.

➤ **Partie B - Changement de base**.

On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

4/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

6/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}.*

7/ Ecrire la matrice $A' = \mathrm{M}_{\mathrm{B}'}(f)$ de f dans la base B'.†

∗. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4} R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

†. On pourra vérifier que A' est une matrice diagonale.

8/ En déduire qu'il existe (au moins) un polynôme $S \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul, tel que $f(S) = 3S$. Donner un exemple d'un tel polynôme S.

9/ Soit n un entier naturel. Préciser l'expression de A'^n, ainsi que le lien entre A^n et A'^n.

➤ Partie C - Origine de B′.

Dans la partie précédente, on a introduit une base B' dans laquelle la matrice de f est diagonale (càd "particulièrement simple"). Comme vous vous en doutez, cette base n'a pas été choisie au hasard, et la méthode générale pour la déterminer relève du programme de Spé.

Néanmoins, dans le cas particulier de cet exercice, il existe une autre méthode pour expliquer l'origine de la base B', uniquement basée sur des connaissance de Sup. L'objectif des questions ci-dessous est précisément de présenter cette méthode.

10/ **Deux propriétés générales des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$.**

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, et soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels deux à deux distincts. On suppose qu'il existe trois polynômes non nuls P, Q et R dans $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\varphi(P) = \lambda_1 P\,; \qquad \varphi(Q) = \lambda_2 Q\,; \qquad \varphi(R) = \lambda_3 R$$

a/ Etablir que la famille $F = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b/ Montrer que : $[\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])] \Longleftrightarrow [\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0]$

11/ Soit λ un réel, et soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Etablir que $f(P) = \lambda P$ si et seulement si P est solution de l'équation différentielle $\left(x^2 - 1\right) y' - (2x + 1 - \lambda)\, y = 0$.

12/ On note (E_λ) l'équation différentielle : $\left(x^2 - 1\right) y' - (2x + 1 - \lambda)\, y = 0$.

a/ Résoudre l'équation différentielle (E_λ) sur l'intervalle $I = \,]1; +\infty[$. ‡

b/ Montrer qu'il existe une fonction polynomiale non nulle solution de (E_λ) sur $]1; +\infty[$ si et seulement si $\lambda \in \{-1; 1; 3\}$.

Exercice 28. — (Inversibilité ⟷ Rang maximal).

Pour toute matrice carrée A, il est équivalent de dire que A est inversible ou que le rang de A est égal à n. Formellement § :

$$\forall\, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})\,, \quad [A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})] \Longleftrightarrow [\mathrm{rg}(A) = n]$$

Cette observation faite, on propose ci-dessous de prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de quatre manières différentes.

1/ Résoudre le système "$AX = B$". En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

2/ Calculer $(A + \mathrm{I}_3)^3$. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

3/ Calculer le rang de A. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

4/ Montrer que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

‡. Par "résoudre l'équation différentielle" on entend "déterminer toutes les fonctions de $\mathscr{C}^1(]1; +\infty[\,, \mathbb{R})$ solutions de (E_λ)".

§. C'est une conséquence du théorème du rang : l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A est surjectif (càd $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = n$) SSI il est bijectif (càd $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).