Colle 27 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété (trace d'un projecteur)** : soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tel que $p^2 = p$. On a : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Preuve. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. On peut affirmer que $E = \ker(p) \bigoplus \text{Im}(p)$ (cf propriétés des projecteurs). On choisit alors une base $\mathscr{B}' = (v_1, \ldots, v_r)$ de $\text{Im}(p)$ (l'entier r désignant le rang de p) et une base $\mathscr{B}'' = (w_1, \ldots, w_{n-r})$ de $\ker(p)$, de telle sorte que $\mathscr{B} = \mathscr{B}' \cup \mathscr{B}''$ est une base de E.

Par construction des vecteurs v_j, on a : $\forall\, j \in [\![\, 1, r \,]\!],\ p(v_j) = v_j$, car $v_j \in \text{Im}(p)$, et $\text{Im}(p) = \ker(\text{id}_E - p)$ (re-cf propriétés des projecteurs).
Et par construction des vecteurs w_j, on a : $\forall\, j \in [\![\, 1, n-r \,]\!],\ p(w_j) = 0$, car $w_j \in \ker(p)$.

Il s'ensuit que la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$ est : $M_{\mathscr{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

On en déduit que $\text{tr}\,(M_{\mathscr{B}}(p)) = \text{tr}\,(J_r) = r$. Par suite : $\text{tr}(p) = r$. Ainsi : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Conclusion. soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tel que $p^2 = p$. On a : $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Question de cours 2. — **Théorème** : soit $A \in \text{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a : $[\text{rg}(A) = r] \Longrightarrow [A \equiv J_r]$

Preuve. Soit $A \in \text{M}_{np}(\mathbb{K})$, de rang r. Il revient au même de dire que l'application linéaire canoniquement associée $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ est de rang r. Le noyau de f_A est donc de dimension $p - r$ (d'après le théorème du rang), et admet donc un supplémentaire dans E, que l'on note S et qui est de dimension r (d'après le théorème assurant l'existence d'un supplémentaire).

On construit alors une base $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_r, v_1, v_{p-r})$ de $\mathbb{K}^p$, de telle sorte que $(u_1, \ldots, u_r)$ est une base de S, et $(v_1, \ldots, v_{p-r})$ est une base de $\ker f_A$.

Puisque $f_{|S}$ est injective (cf preuve du théorème du rang), la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_r))$ est libre. A son tour, elle peut être complétée en une base $\mathscr{B}' = (f(u_1), \ldots, f(u_r), w_1, \ldots, w_{n-r})$ de $\mathbb{K}^n$ (d'après le théorème de la base incomplète).

On a alors par construction : $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f_A) = J_r$.

Par ailleurs, en notant P (*resp.* P') la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^p$ (*resp.* à la base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{K}^n$), la formule du changement de base assure que :

$$J_r = \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f_A) = P'AP$$

Puisque P et P' sont inversibles (car toute matrice de passage l'est), cette dernière égalité signifie que A et J_r sont équivalentes. Ce qui prouve l'implication. (La réciproque, non demandée, est aisée).

Question de cours 3. — **Propriété** — $\forall\, A \in \text{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad \text{rg}\left({}^tA\right) = \text{rg}(A)$

Preuve. Supposons que $A \in \text{M}_{np}(\mathbb{K})$ soit de rang r. Alors il existe deux matrices $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que : $PAQ = J_r$. On en déduit : ${}^tQ\,{}^tA\,{}^tP = {}^tJ_r$. Or ${}^tQ$ et ${}^tP$ sont inversibles, et la matrice ${}^tJ_r$ est la matrice "J_r" de $\text{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

Il s'ensuit que ${}^tA$ est équivalente à J_r, et que $\text{rg}({}^tA) = r$ d'après le théorème précédent. On a ainsi établi que si A est de rang r, alors sa transposée est de rang r.

Question de cours 4. — La trace est un invariant de similitude dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblables. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
On a alors : $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{tr}(PP^{-1}A) = \mathrm{tr}(A)$. *
On en déduit que deux matrices semblables ont même trace.

Question de cours 5. — Le rang est un invariant de similitude dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblables. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.
En notant $f_\bullet$ les applications linéaires canoniquement associées aux matrices de cette égalité, on obtient :

$$f_B = f_P^{-1} \circ f_A \circ f_P$$

puis la conclusion en observant que le rang d'une application linéaire est invariant par composition à gauche ou à droite avec un isomorphisme.
Ainsi, deux matrices semblables ont même rang.

---

*. En utilise de manière essentielle la formule $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, dont la démonstration est à savoir retrouver rapidement.

Banque d'exercices

Exercice 1. — Soit n un entier naturel non nul. On note $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$.
A tout polynôme P de E, on associe l'élément noté $f(P)$ de $\mathbb{K}^{2n+2}$ défini par :

$$f(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n), P'(0), P'(1), \dots, P'(n))$$

Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \dots, 2n+2)$$

Exercice 2. — On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ dont la matrice dans la base canonique $B = \left\{1, X, X^2, X^3\right\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est C.

1/ Calculer le rang de g.

2/ Déterminer une base de $\mathrm{Im} g$, puis une base de $\ker g$.

Exercice 3. — Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (avec a, b et $c \in \mathbb{K}$)

Exercice 4. — Calculer le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$ en fonction du réel m.

Exercice 5. — **(Existence d'un polynôme annulateur).**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit u un endomorphisme de u.
Etablir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 6. — On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto (2X+1)\,P - \left(X^2 - 1\right)P'$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1/ Ecrire la matrice $A = \mathrm{M}_B\,(f)$ de f dans la base $B = \left\{1, X, X^2\right\}$.

2/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?