

Exercice 3 CB2

PREMIÈRE PARTIE.

$$1. F(\mathbf{E}_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{E}_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{E}_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{E}_{22}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Soit } \mathcal{F} \text{ la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

La famille $\mathcal{F}$ comporte 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbf{R})) = 4$ donc il suffit de montrer que la famille est libre :

$$\text{Soit } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4, \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta - \delta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = \beta \\ \delta = \beta \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

$\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

3. On sait déjà que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On a admis : [$f(\mathbf{B})$ est une base de F] $\Rightarrow$ [f est un isomorphisme de E dans F]

donc d'après la question 2) F est un isomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. F est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

DEUXIÈME PARTIE

$$4. \sum_{i=0}^k x^i = \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \text{ car } x \neq -1.$$

5. Pour tout $P \in E_n$, l'application $x \rightarrow \int_1^x P(t)dt$ est une application polynômiale, de degré au plus $n+1$, et qui s'annule en 1. Le polynôme associé est donc dans E_{n+1} , et admet 1 comme racine : il est divisible par $X-1$, et le quotient est un polynôme de E_n .

6. a. Soit $k \in [0, n]$. $\forall x \neq 1, \frac{1}{x-1} \int_1^x t^k dt = \frac{1}{x-1} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_1^x = \frac{1}{k+1} \frac{x^{k+1}-1}{x-1} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k x^i$, donc :

$$\forall k \in [0, n], f(X^k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k X^i, \text{ et : } \deg(f(X^k)) = k.$$

b. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

La famille $f(\mathcal{B})$ comporte $n+1$ vecteurs et $\dim(\mathbf{R}_n[X]) = n+1$ donc il suffit de montrer que la famille est libre or les vecteurs de cette famille sont des polynômes de degrés échelonnés donc $f(\mathcal{B})$ est libre.

$f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ donc d'après les résultats admis, f est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

- c. Soit $Q \in \mathbf{R}_n[X]$. Résolvons l'équation $Q = f(P)$ d'inconnue $P \in E_n$. Pour cela, on note que si cette équation est vérifiée alors, après multiplication par $x - 1$ et dérivation, on a :

$$\forall x \neq 1, \quad P(x) = Q(x) + (x - 1)Q'(x).$$

Par conséquent, s'il y a une solution, alors ce doit être : $P = Q + (X - 1)Q'$ (on passe des applications polynomiales aux polynômes en notant que si l'égalité ci-dessus est vraie pour tout $x \neq 1$, alors le polynôme $P - (Q + (X - 1)Q')$ admet pour racines tous les réels différents de 1, ce qui fournit une infinité de racines ; ce n'est possible que si $P - (Q + (X - 1)Q') = 0_{E_n}$). Réciproquement, le polynôme $P = Q + (X - 1)Q'$ convient, puisqu'on peut intégrer ci-dessous en reconnaissant la dérivée d'un produit :

$$\forall x \neq 1, \quad \frac{1}{x - 1} \int_1^x (Q(t) + (t - 1)Q'(t)) dt = \frac{1}{x - 1} [(t - 1)Q(t)]_1^x = \frac{(x - 1)Q(x)}{x - 1} = Q(x),$$

d'où : $f(Q + (X - 1)Q') = Q$.

On retrouve que f est bijective, puisque tout élément de E_n admet exactement un antécédent, et d'autre part que son application réciproque est définie par :

$$\forall Q \in E_n, \quad f^{-1}(Q) = Q + (X - 1)Q' = ((X - 1)Q)'$$

TROISIÈME PARTIE.

7. Soient $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto 2$.

$\Delta(f_1) = \Delta(f_2)$ mais $f_1 \neq f_2$ donc Δ n'est pas injective.

Soit $g \in E$ alors g est continue sur $\mathbf{R}$ donc y admet au moins une primitive f qui appartient à E car $g \in E$ et $\Delta(f) = g$ donc Δ est surjective.

8. **Liberté de la famille** $B = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$.

Supposons qu'il existe quatre réels $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ tels que :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0_E$$

- a. Si $\lambda_1 = 0$ alors $\varphi = \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4$

et $\forall x \in \mathbf{R}_+, |\lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) + \lambda_4 g_4(x)| \leq |\lambda_2| |g_2(x)| + |\lambda_3| |g_3(x)| + |\lambda_4| |g_4(x)| \leq |\lambda_2| \times 1 + |\lambda_3| \times 1 + |\lambda_4| \times 1$. Donc φ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

Si $\lambda_2 \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \pm\infty$ donc φ n'est pas bornée sur $\mathbf{R}_+$.

- b. $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4 = 0_E$

et 0_E est bornée sur $\mathbf{R}_+$ donc $\lambda_1 = 0$.

On peut montrer de la même manière que $\lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 + \lambda_4 g_4$ est bornée sur $\mathbf{R}_-$ si et seulement si $\lambda_2 = 0$. Donc $\lambda_2 = 0$.

On a $\forall x \in \mathbf{R}, \lambda_3 \cos(x) + \lambda_4 \sin(x) = 0$.

Avec $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\lambda_4 = 0$.

Avec $x = 0$, on a $\lambda_3 = 0$.

La famille B est libre et génératrice de F ("Vect") donc la famille B est une base de F .

9. $\Delta(g_1) = g_1 \in F$.

$\Delta(g_2) = -g_2 \in F$ car $g_2 \in F$ et F espace vectoriel.

$\Delta(g_3) = -g_4 \in F$ car $g_4 \in F$ et F espace vectoriel.

$\Delta(g_4) = g_3 \in F$ car $g_3 \in F$.

10. Tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire des g_i avec $i \in [1, 4]$ et Δ est linéaire donc l'image par Δ de vecteur s'écrit comme combinaison linéaire des $\Delta(g_i)$ avec $i \in [1, 4]$ soit des g_i d'après la question précédente donc est élément de F car F est un espace vectoriel.

$$\Delta(F) \subset F.$$

11. δ est un endomorphisme de F . De plus, $\delta(B) = (g_1, -g_2, -g_4, g_3)$ est une base de F donc δ est un isomorphisme de F .

δ est un automorphisme de F .

12. Montrer que $\delta^2 \circ \delta^2 = I_d$, c'est-à-dire $\forall x \in F, (\delta^4)(x) = x$, Il suffit de montrer que $\forall i \in [1, 4], (\delta^4)(g_i) = g_i$ car (g_1, g_2, g_3, g_4) est une base de F .

donc δ^2 est une symétrie par rapport à $F_1 = \text{Ker}(\delta^2 - I_d)$ parallèlement à $F_2 = \text{Ker}(\delta^2 + I_d)$.

Soit $u \in F$. u s'écrit sous la forme : $u = ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4$ avec $a, b, c, d \in R$

$u \in \text{Ker}(\delta^2 - I_d) \Leftrightarrow \delta^2(u) = u \Leftrightarrow \delta^2(ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4) = ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4 \Leftrightarrow ag_1 + bg_2 - cg_3 - dg_4 = ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4 \Leftrightarrow c = d = 0$ par identification car (g_1, g_2, g_3, g_4) est libre.

$F_1 = \text{Ker}(\delta^2 - I_d) = \{ag_1 + bg_2 \text{ avec } a, b \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(g_1, g_2)$

Soit $u \in F$. u s'écrit sous la forme : $u = ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4$ avec $a, b, c, d \in R$

$u \in \text{Ker}(\delta^2 + I_d) \Leftrightarrow \delta^2(u) = -u \Leftrightarrow \delta^2(ag_1 + bg_2 + cg_3 + dg_4) = -ag_1 - bg_2 - cg_3 - dg_4 \Leftrightarrow ag_1 + bg_2 - cg_3 - dg_4 = -ag_1 - bg_2 - cg_3 - dg_4 \Leftrightarrow a = b = 0$ par identification car (g_1, g_2, g_3, g_4) est libre.

$F_2 = \text{Ker}(\delta^2 + I_d) = \{cg_3 + dg_4 \text{ avec } c, d \in \mathbf{R}\} = \text{Vect}(g_3, g_4)$