

COLLE 28 – QUESTIONS DE COURS

Aucune démonstration de cours cette semaine ! Seuls les énoncés sont à connaître !

BANQUE D'EXERCICES

EXERCICE 1. — Montrer que la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge, et calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

EXERCICE 2. — Montrer que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^{1,02}}$ converge.

EXERCICE 3. — Montrer que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^{3/2}}$ converge pour tout réel θ .

EXERCICE 4. — Montrer que la série $\sum \frac{\text{sh}(2023n)}{\text{ch}(2024n)}$ converge.

EXERCICE 5. — En utilisant le théorème de comparaison série/intégrale, démontrer que la série harmonique $\sum n^{-1}$ diverge.

EXERCICE 6. — En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, établir que pour tout réel positif x on a : $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

EXERCICE 7. — On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

Etablir que :

$$1/ u_n \sim_{+\infty} v_n \quad 2/ \sum u_n \text{ converge} \quad 3/ \sum v_n \text{ diverge}$$

Conclure qu'il est indispensable de vérifier les hypothèses avant d'appliquer une propriété!

EXERCICE 8. — Etudier la nature de la série $\sum n^\alpha \left(\frac{1}{n^2} - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ en fonction du paramètre réel α .