MPSI – Colle 28 (10 au 15 juin 2024) : Séries numériques

Chapitre 27 : Séries numériques

1 – Généralités

Dans ce paragraphe, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier naturel N, on appelle **somme partielle de rang** N (de (u_n)) le scalaire : $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.

Exemples : dans le cas où la suite (u_n) est télescopique, *ie* s'il existe une suite (v_n) telle que pour tout entier n on a $u_n = v_{n+1} - v_n$, alors pour tout entier naturel N on a : $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (v_{n+1} - v_n) = v_{N+1} - v_0$.

Et dans celui où la suite (u_n) est géométrique, *ie* s'il existe un scalaire $q \neq 1$ tel que pour tout entier n on a $u_n = u_0 q^n$, alors pour tout entier naturel N on a : $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_0 q^n = u_0 \times \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}$.

Définition (série). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **série de terme général** u_n la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ de la suite (u_n).

Une série numérique n'est donc qu'un cas particulier de suite.

Notation. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Dans ces lignes, on notera $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Définition (convergence, divergence). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série $\sum u_n$ est **convergente** (*resp.* **divergente**) lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_N)_N$ est convergente (*resp.* divergente).

On obtient comme conséquence immédiate de la propriété de convergence des suites extraites l'énoncé ci-dessous.

Propriété. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque. La réciproque est évidemment FAUSSE. Il se peut très bien que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, et que la série u_n soit divergente. L'exemple d'illustration le plus fameux de cette situation est fourni par la série harmonique $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$, puisque la somme partielle de rang N associée est minorée par une expression tendant vers $+\infty$, explicitement : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1)$.

La contraposée de la propriété précédente donne naissance à la notion de divergence grossière.

Propriété. Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On parle dans ce cas de **divergence grossière**.

Remarque. Ultime observation générale sur les séries : la notion de convergence d'une série $(\sum u_n)$ est une notion *asymptotique*, et ne dépend pas des premiers termes de (u_n). En clair, on ne modifie pas la nature (convergente ou divergente) d'une série en modifiant un nombre fini de termes de la suite (u_n).

2 – Premières séries de référence

Propriété (séries géométriques). Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Propriété (séries télescopiques). Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$. Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n) = \ell - u_0$.

Propriété (séries de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3 – Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, les séries considérées ont des termes généraux dans $\mathbb{R}_+$. Dans ce contexte, les suites des sommes partielles seront positives et croissantes.

Propriété (comparaison). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si la série $\sum v_n$ (*resp.* $\sum u_n$) converge (*resp.* diverge), alors la série $\sum u_n$ (*resp.* $\sum v_n$) converge (*resp.* diverge).

➤ **Application 1**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{n\cos^2(n)} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Il s'ensuit que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$ diverge.

➤ **Application 2**. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Il s'ensuit que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge.

Propriété (équivalents). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Propriété (négligeabilité). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n = o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

Corollaire. Soit (u_n) une suite réelle positive. Si $\lim\limits_{+\infty} n^2 u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Plus généralement d'ailleurs, si $\lim\limits_{+\infty} n^\alpha u_n = 0$ pour un réel $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Propriété (domination). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Propriété (comparaison série-intégrale). Soit f une fonction à valeurs réelles, continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ sont de même nature.

4 – Convergence absolue

Dans ce paragraphe, on revient au cas général, en considérant des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple : pour tout réel θ, et pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

Propriété. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque 1. Cette propriété est d'une grande importance pratique, puisqu'elle permet de ramener l'étude des séries en général à celle des séries à termes positifs (pour lesquelles on dispose d'un "arsenal" impressionnant, cf paragraphe précédent).

Remarque 2. La remarque précédente a cependant ses limites, dans le sens où la réciproque de la propriété est fausse. Il existe en effet des séries qui sont convergentes, mais non absolument convergentes ; de telles séries sont dites **semi-convergentes**. L'exemple le plus célèbre de série semi-convergente est la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$: en effet, celle-ci converge et a pour somme $\ln 2$ (conséquence de Taylor avec reste intégrale), mais elle n'est évidemment pas absolument convergente (la série des modules est la série harmonique).

Questions de cours

Aucune démonstration cette semaine ! Seuls les énoncés sont à connaître !

- **Propriété (comparaison)**. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ + RECIPROQUE FAUSSE !
- **Propriété (séries géométriques)**. Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n = \frac{1}{1-q}$.
- **Propriété (équivalents)**. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- **Propriété (négligeabilité)**. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n = o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
- **Propriété ("AC $\Longrightarrow$ C")**. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente. + RECIPROQUE FAUSSE !