Exercices 28 - Espaces euclidiens - Corrigé

➤ Produit scalaire, orthogonalité

Exercice 1. — Montrer que les deux applications suivantes sont des produits scalaires.

1) $\forall \overrightarrow{u}(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \overrightarrow{v}(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = xx' + 3yy' - xy' - x'y$

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité) : triviales.

Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\langle u, u \rangle = x^2 + 3y^2 - 2xy = (x-y)^2 + 2y^2$. D'où la positivité.

De plus : $\langle u, u \rangle = 0 \Longrightarrow [x - y = 0 \text{ et } y = 0] \Longrightarrow [x = y = 0]$.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2) $\forall\ (f,g) \in \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})^2,\ \langle f, g \rangle = f(0)\,g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que : $\langle f, f \rangle = 0$. Alors :

$$f^2(0) + \int_0^1 \left[f'(t)\right]^2 \mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que $f(0) = 0$ et f' identiquement nulle sur $[0,1]$ (propriété de l'intégrale nulle). Donc f est constante égale à 0. La forme $\langle , \rangle$ est donc définie.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.

Exercice 2. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ P(k) = 0$$

Donc P admet $(n+1)$ racines distinctes. Puisqu'il est de degré majoré par n, il est nul. La forme $\langle , \rangle$ est donc définie.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \left[P^{(k)}(0)\right]^2 \Longrightarrow \forall k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ P^{(k)}(0) = 0$$

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que P est nul. La forme $\langle , \rangle$ est donc définie.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4. — Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^1([0;\pi], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continuement dérivables sur $[0;\pi]$. Les applications ci-dessous sont-elles des produits scalaires sur E ?

1) $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\, g(t)\ \mathrm{d}t$ 2) $\psi(f,g) = \displaystyle\int_0^\pi f'(t)\, g'(t)\ \mathrm{d}t$

1/ Oui : linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales. Définie : propriété de l'intégrale nulle.

2/ Non : la forme n'est pas définie (est dégénérée) : $\psi(1,1) = 0$.

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non-nul. On considère l'application :

$$\forall\ (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$$

1/ En notant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

Notons $P = AB$. Par définition du produit matriciel, on a : $p_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \left({}^tA\right)_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} b_{kj}$.

En particulier : $p_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^n \left({}^tA\right)_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki} b_{ki}$. D'où : $\mathrm{tr}(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki} b_{ki}$.

Conclusion. $\mathrm{tr}\left({}^tAB\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$

2/ Montrer que l'application $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Définie : si $\langle A, A\rangle = 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0 \Longrightarrow \forall\,(i,i) \in [\![\, 1, n \,]\!]^2,\ a_{ij} = 0 \Longrightarrow A = 0$

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. — Soient E un ev préhilbertien. Montrer que l'application $A \in \mathscr{P}(E) \longmapsto A^\perp \in \mathscr{P}(E)$ est décroissante pour l'inclusion, càd :

$$\forall\ (F,G) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E), \quad [F \subset G] \Longrightarrow \left[F^\perp \supset G^\perp\right]$$

Supposons $F \subset G$. Si $v \in G^\perp$, alors v est orthogonal à tout vecteur de G, donc a fortiori à tout vecteur de F : donc $v \in F^\perp$.

Conclusion. $\forall\ (F,G) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E), \quad [F \subset G] \Longrightarrow \left[F^\perp \supset G^\perp\right]$

Exercice 7. — Soient E un ev préhilbertien, et $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs de E. Etablir que :

$$[\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)]^\perp = \{v_1, \ldots, v_n\}^\perp$$

D'après l'exercice précédent : $[\text{Vect}(v_1,\ldots,v_n)]^\perp \subset \{v_1,\ldots,v_n\}^\perp$.

Inclusion réciproque : si $w \in \{v_1,\ldots,v_n\}^\perp$, alors $w \in [\text{Vect}(v_1,\ldots,v_n)]^\perp$ par hypothèse et linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable (ou la seconde, comme vous voulez).

Conclusion. $[\text{Vect}(v_1,\ldots,v_n)]^\perp = \{v_1,\ldots,v_n\}^\perp$.

Applications.

A.1. On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

D'après l'exercice précédent : $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \{1, X\}^\perp$.

Déterminons : $\{1, X\}^\perp$ (c'est l'ensemble des polynômes de E orthogonaux à 1 et X).

Notons $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$P \in \{1, X\}^\perp \iff (\langle P, 1\rangle = 0 \text{ et } \langle P, X\rangle = 0) \iff (2a + 3c = 0 \text{ et } b = 0) \iff (c = -2a/3 \text{ et } a = 0)$$

D'où : $P \in \{1, X\}^\perp \iff P \in \text{Vect}\left(X^2 - \dfrac{2}{3}\right)$.

Conclusion. $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \text{Vect}\left(X^2 - \dfrac{2}{3}\right)$.

A.2. On munit $E = \text{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle A, B\rangle = \text{tr}\left({}^tAB\right)$. Déterminer $\text{A}_2(\mathbb{R})^\perp$.*

D'après la première question : $\text{A}_2(\mathbb{R})^\perp = \{E_{12} - E_{21}\}^\perp$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in \text{A}_2(\mathbb{R})^\perp \iff \langle M, E_{12} - E_{21}\rangle = 0 \iff b - c = 0 \iff M \in \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}) = \text{S}_2(\mathbb{R})$$

Conclusion. $\text{A}_2(\mathbb{R})^\perp = \text{S}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. — Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2\text{e}_1 - 3\text{e}_2$. Déterminer $D^\perp$.

$D^\perp = \text{Vect}(3, 2)$

Conclusion.

Exercice 9. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2\text{e}_1 - 3\text{e}_2$. Déterminer $D^\perp$.

$D^\perp = \text{Vect}((3, 2, 0), (3, 2, 1))$

Exercice 10. — Soit F un sev d'un espace euclidien E. Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

En classe.

Exercice 11. — Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2$.

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

*. $\text{A}_2(\mathbb{R})^\perp$ désignant le sev des matrices antisymétriques de $\text{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 12. — Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive, et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) : \mathrm{d}t$. Montrer que : $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$.

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

➤ Bases orthonormales, méthode de Gram-Schmidt

Exercice 13. — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B.

Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u} = (1,0,1),\ \overrightarrow{v} = (1,2,0)\right)$. Déterminer une base orthonormale de P.

Exercice 14. — On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B, et on considère le sev F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 15. — Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (muni produit scalaire usuel) dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x-y+z=0$.

$\overrightarrow{u}(1,1,0)$ appartient au plan, et $\overrightarrow{n}(1,-1,1)$ est normal au plan. Donc : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}(1,-1,-2)$ appartient au plan, et est orthogonal au deux précédents.

Conclusion. La famille $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (muni produit scalaire usuel) dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x-y+z=0$.

Exercice 16. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\right\}$. Déterminer une base orthonormale de P.

$\overrightarrow{u}(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{v}(1,1,-2)$ appartiennent au plan P, et sont orthogonaux.

Conclusion. La famille $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ est une base orthonormale de P.

Exercice 17. — On note $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques (et à valeurs réelles), muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$$

Montrer que la famille $(f_n,\ n \in \mathbb{N}^\star)$, avec $f_n(x) = \cos(nx)$, est une famille orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$.

Il suffit de vérifier que $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ si $n \neq m$, et $\langle f_n, f_n\rangle = 1$; ce qui constitue une petite révision du formulaire de trigo.

Exercice 18. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\ \mathrm{d}t$.
Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

La famille $B_1 = \{1, X - 1/2\}$ est clairement une base de $\mathbb{R}_1[X]$ orthogonale pour le produit scalaire considéré.
Conclusion. La famille $B_2 = \left\{ \dfrac{1}{\|1\|}, \dfrac{1}{\|X - 1/2\|}\ (X - 1/2) \right\}$ est clairement une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ (pour le produit scalaire de l'énoncé).

Exercice 19. — On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B.

Soit $F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u} = (1,0,1,0)\,,\ \overrightarrow{v} = (0,1,1,0)\,,\ \overrightarrow{w} = (0,0,1,1)\right)$. Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 20. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^{2} P(i)\,Q(i)\,.$$

Construire une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

$B = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,X, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(1 - X) \right\}$ convient.

➤ Distance, distance à un sev et optimisation

Exercice 21. — **(Propriétés de la distance)**. Soient E un espace préhilbertien. On note respectivement $\|.\|$ et d la norme et la distance naturellement associées au produit scalaire de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1/ $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ \mathrm{d}(u,v) \geqslant 0$ (positivité)

2/ $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ \mathrm{d}(u,v) = d(v,u)$ (symétrie)

3/ $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ [\mathrm{d}(u,v) = 0] \Longrightarrow [u = v]$ (séparation)

4/ $\forall\ (u,v,w) \in\ E^3,\ \mathrm{d}(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ (inégalité triangulaire)

En classe.

Exercice 22. — 1/ Montrer que l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2\,,\ \int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Routine.

2/ On note $\|.\|$ la norme sur $\mathbb{R}_2[X]$ associée au produit scalaire ci-dessus. Calculer $\|1\|$ et $\|X\|$.

3/ Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

4/ Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. En déduire $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(t^2 - at - b\right)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 23. — Déterminer $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \left[t^2 - (at+b)\right]^2 dt$.

Exercice 24. — Déterminer $\lambda = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^\pi \left[a\sin(t) + b\cos(t) - t\right]^2 dt$.

Exercice 25. — **(Projection orthogonale).** Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x+y+z=0$; et $p \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ la projection orthogonale sur H.

1) Construire une base $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$, telle que B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartenant à H.

2) Ecrire la matrice A' de p dans la base B'.

3) Expliciter la matrice A de p dans la base canonique B.

1) Le plan H a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}_3\,(1,1,1)$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}_1\,(1,-1,0)$ et $\overrightarrow{u}_2\,(1,1,-2)$ lui sont clairement orthogonaux (et appartiennent donc à H), et sont orthogonaux.

Il s'ensuit que la famille : $B' = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{v_1}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{v_2}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{v_3}}\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartenant à H.

2) Par définition de la projection orthogonale sur H, et par construction des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$, on a : $p(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$; $p(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2}$ et $p(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{0}$. La matrice A' de p dans la base B' est donc : $A' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

3) D'après la formule du changement de base, on a : $A = PA'P^{-1}$, où $P = P_{BB'}$ est la matrice de passage de la base B à la base B'. D'après la question 1, on a donc : $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&-2&\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Puisque la base B' est orthonormale, la matrice P est orthogonale ($P \in O(3)$), d'où : $P^{-1} = {}^tP$. Il s'ensuit que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&-2&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\\1&1&-2\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&-2&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}&0\\1&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 26. — (Symétrie orthogonale). Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x - z = 0$; et $s \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ la symétrie orthogonale par rapport à H.

1) Construire une base $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$, telle que B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartenant à H.

2) Ecrire la matrice A' de s dans la base B'.

3) Expliciter la matrice A de s dans la base canonique B.

1) Le plan H a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}_3\,(1,0,-1)$. Les deux vecteurs $\overrightarrow{u}_1\,(0,1,0)$ et $\overrightarrow{u}_2\,(1,0,1)$ lui sont clairement orthogonaux (et appartiennent donc à H), et sont orthogonaux.

Il s'ensuit que la famille : $B' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{v_1}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{v_2}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\overrightarrow{v_3}} \right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartenant à H.

2) Par définition de la symétrie orthogonale par rapport à H, et par construction des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$, on a : $s\left(\overrightarrow{v_1}\right) = \overrightarrow{v_1}$; $s\left(\overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{v_2}$ et $s\left(\overrightarrow{v_3}\right) = -\overrightarrow{v_3}$. La matrice A' de s dans la base B' est donc : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) D'après la formule du changement de base, on a : $A = PA'P^{-1}$, où $P = P_{BB'}$ est la matrice de passage de la base B à la base B'. D'après la question 1, on a donc : $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Puisque la base B' est orthonormale, la matrice P est orthogonale ($P \in O(3)$), d'où : $P^{-1} = {}^tP$. Il s'ensuit que :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

➤ Groupes d'automorphismes

Exercice 27. — (Groupe orthogonal). Soit E un espace euclidien, et soit u un endomorphisme de E. On dit que u est un **endomorphisme orthogonal** s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall\ (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

1/ Montrer que si u est orthogonal, alors : $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

2/ En déduire que si u est un endomorphisme orthogonal, alors u est un automorphisme de E.

3/ Prouver la réciproque de 1/ : si $\forall\, x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$, alors u est orthogonal.

4/ On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. Montrer que $O(E)$ est un groupe (pour la composition des applications évidemment).

Exercice 28. — **(Groupe des similitudes d'un espace euclidien)**. Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle **similitude** de E une application $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\exists\, \lambda > 0,\ \forall\, x \in E,\quad \|f(x)\| = \lambda\ \|x\|.$$

Le réel λ est alors appelé **rapport** de la similitude f.

1) Etablir que f est une similitude de E si et seulement si :

$$\exists\, \lambda > 0,\ \forall\ (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle.$$

2) Prouver que si f est une similitude de E, alors f est un automorphisme de E.

3) Etablir que si f est une similitude de E de rapport λ, alors f^{-1} est une similitude de E dont on précisera le mystérieux rapport.

4) On note $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E. Etablir que $(\mathrm{Sim}(E), \circ)$ est un groupe.

1) Supposons que f soit une similitude de E. Soient x et y dans E.

On a, d'après l'identité de polarisation : $\langle f(x), f(y)\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2\right)$.

D'où : $\langle f(x), f(y)\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right) = \dfrac{1}{4}\left(\lambda^2\ \|x+y\|^2 - \lambda^2\ \|x-y\|^2\right)$

$$\frac{\lambda^2}{4}\left(\ \|x+y\|^2 -\ \|x-y\|^2\right) = \lambda^2 \langle x, y\rangle$$

Les vecteurs x et y étant des éléments quelconques de E, on a ainsi établi que :

$$[f \text{ est une similitude de } E] \Longrightarrow \left[\exists\, \lambda > 0,\ \forall\ (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle\right]$$

La réciproque est triviale.

2) Supposons que f est une similitude de E de rapport $\lambda > 0$. Soit $x \in E$. On a :
$[f(x) = 0] \Longleftrightarrow [\|f(x)\| = 0] \Longleftrightarrow [\lambda\,\|x\| = 0] \Longleftrightarrow_{\lambda\neq 0} [\|x\| = 0] \Longleftrightarrow [x = 0]$. Ainsi $\ker f = \{0\}$, et f est donc injectif. En tant qu'endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est un automorphisme de cet espace vectoriel.

3) Soit f une similitude de E de rapport λ. Alors f est un automorphisme de E, et f^{-1} existe.

Soit $x \in E$. On a : $\left\|f\left(f^{-1}(x)\right)\right\| = \|x\|$, et $\left\|f\left(f^{-1}(x)\right)\right\| = \lambda\left\|f^{-1}(x)\right\|$. D'où : $\forall\, x \in E,\ \lambda\left\|f^{-1}(x)\right\| = \|x\|$.

Ainsi : $\forall\, x \in E,\ \left\|f^{-1}(x)\right\| = \lambda^{-1}\,\|x\|$. Ce qui assure que f^{-1} est une similitude de rapport λ^{-1}.

4) L'ensemble $\mathrm{Sim}(E)$ est une partie de $\mathrm{GL}(E)$ (d'après la question 2), qui contient id_E (immédiat), stable par composition (la composée de deux similitudes de rapports λ et μ est clairement une similitude de rapport $\lambda\mu$), et par passage à l'inverse d'après la question précédente.

Ainsi, $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$; en particulier, $\mathrm{Sim}(E)$ est un groupe.