Exercices 28 - Espaces euclidiens

➤ Produit scalaire, orthogonalité

Exercice 1. — Montrer que les deux applications suivantes sont des produits scalaires.

1) $\forall\ \overrightarrow{u}\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\ \overrightarrow{v}\,(x',y')\in\mathbb{R}^2,\ \langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\rangle = xx'+3yy'-xy'-x'y$

2) $\forall\ (f,g)\in\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})^2,\ \langle f,g\rangle = f(0)\,g(0)+\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 2. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2,\ \langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P(k)\,Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2,\ \langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(0)\,Q^{(k)}(0)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4. — Dans cet exercice, on note $E=\mathscr{C}^1([0;\pi],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continuement dérivables sur $[0;\pi]$. Les applications ci-dessous sont-elles des produits scalaires sur E ?

1) $\varphi(f,g)=\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$ 2) $\psi(f,g)=\displaystyle\int_0^{\pi} f'(t)\,g'(t)\ \mathrm{d}t$

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non-nul. On considère l'application :

$$\forall\ (A,B)\in\ \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$$

1/ En notant $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\langle A,B\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$.

2/ Montrer que l'application $\langle\bullet,\bullet\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. — Soient E un ev préhilbertien. Montrer que l'application $A\in\mathscr{P}(E)\longmapsto A^{\perp}\in\mathscr{P}(E)$ est décroissante pour l'inclusion, càd :

$$\forall\ (F,G)\in\ \mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E),\quad [F\subset G]\Longrightarrow\left[F^{\perp}\supset G^{\perp}\right]$$

Exercice 7. — Soient E un ev préhilbertien, et $v_1,\ldots,v_n$ n vecteurs de E. Etablir que :

$$[\mathrm{Vect}(v_1,\ldots,v_n)]^{\perp}=\{v_1,\ldots,v_n\}^{\perp}$$

Applications.

A.1. On munit $E=\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\langle P,Q\rangle=P(-1)Q(-1)+P(0)Q(0)+P(1)Q(1)$. Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^{\perp}$.

A.2. On munit $E=\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$. Déterminer $\mathrm{A}_2(\mathbb{R})^{\perp}$.[*]

Exercice 8. — Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u=2\mathrm{e}_1-3\mathrm{e}_2$. Déterminer $D^{\perp}$.

∗. $\mathrm{A}_2(\mathbb{R})^{\perp}$ désignant le sev des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2\mathrm{e}_1 - 3\mathrm{e}_2$. Déterminer $D^\perp$.

Exercice 10. — Soit F un sev d'un espace euclidien E. Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Exercice 11. — Soit $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exercice 12. — Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et positive, et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) : \mathrm{d}t$. Montrer que : $I_{n+p}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}$.

➤ Bases orthonormales, méthode de Gram-Schmidt

Exercice 13. — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B.

Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u} = (1,0,1)\,,\ \overrightarrow{v} = (1,2,0)\right)$. Déterminer une base orthonormale de P.

Exercice 14. — On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B, et on considère le sev F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 15. — Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (muni produit scalaire usuel) dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 16. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère $P = \left\{(x,y,z) \in \ \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = 0\right\}$. Déterminer une base orthonormale de P.

Exercice 17. — On note $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques (et à valeurs réelles), muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\ \mathrm{d}t$$

Montrer que la famille $(f_n,\ n \in \mathbb{N}^\star)$, avec $f_n(x) = \cos(nx)$, est une famille orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$.

Exercice 18. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\ \mathrm{d}t$. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

Exercice 19. — On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B.

Soit $F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u} = (1,0,1,0)\,,\ \overrightarrow{v} = (0,1,1,0)\,,\ \overrightarrow{w} = (0,0,1,1)\right)$. Déterminer une base orthonormale de F.

Exercice 20. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} P(i)\,Q(i)\,.$$

Construire une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

➤ Distance, distance à un sev et optimisation

Exercice 21. — **(Propriétés de la distance)**. Soient E un espace préhilbertien. On note respectivement $\|.\|$ et d la norme et la distance naturellement associées au produit scalaire de E. Démontrer les propriétés suivantes :

1/ $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ \mathrm{d}(u,v) \geqslant 0$ (positivité)

2/ $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ \mathrm{d}(u,v) = d(v,u)$ (symétrie)

3/ $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ [\mathrm{d}(u,v) = 0] \Longrightarrow [u = v]$ (séparation)

4/ $\forall\ (u,v,w) \in\ E^3,\ \mathrm{d}(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ (inégalité triangulaire)

Exercice 22. — 1/ Montrer que l'application définie par :

$$\forall\ (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2\,,\ \int_{-1}^{1} \frac{P(t)\,Q(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2/ On note $\|.\|$ la norme sur $\mathbb{R}_2[X]$ associée au produit scalaire ci-dessus. Calculer $\|1\|$ et $\|X\|$.

3/ Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

4/ Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. En déduire $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \frac{\left(t^2 - at - b\right)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 23. — Déterminer $m = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 \left[t^2 - (at+b)\right]^2 dt.$

Exercice 24. — Déterminer $\lambda = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^{\pi} \left[a\sin(t) + b\cos(t) - t\right]^2 dt.$

Exercice 25. — **(Projection orthogonale).** Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x+y+z=0$; et $p \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ la projection orthogonale sur H.

1) Construire une base $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$, telle que B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartenant à H.

2) Ecrire la matrice A' de p dans la base B'.

3) Expliciter la matrice A de p dans la base canonique B.

Exercice 26. — (Symétrie orthogonale). Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x - z = 0$; et $s \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ la symétrie orthogonale par rapport à H.

1) Construire une base $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$, telle que B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ appartenant à H.

2) Ecrire la matrice A' de s dans la base B'.

3) Expliciter la matrice A de s dans la base canonique B.

➤ Groupes d'automorphismes

Exercice 27. — (Groupe orthogonal). Soit E un espace euclidien, et soit u un endomorphisme de E. On dit que u est un **endomorphisme orthogonal** s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall\ (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

1/ Montrer que si u est orthogonal, alors : $\forall\ x \in\ E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

2/ En déduire que si u est un endomorphisme orthogonal, alors u est un automorphisme de E.

3/ Prouver la réciproque de 1/ : si $\forall\ x \in\ E,\ \|u(x)\| = \|x\|$, alors u est orthogonal.

4/ On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. Montrer que $O(E)$ est un groupe (pour la composition des applications évidemment).

Exercice 28. — (Groupe des similitudes d'un espace euclidien). Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle **similitude** de E une application $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\exists\ \lambda > 0,\ \forall\ x \in\ E, \quad \|f(x)\| = \lambda\ \|x\|.$$

Le réel λ est alors appelé **rapport** de la similitude f.

1) Etablir que f est une similitude de E si et seulement si :

$$\exists\ \lambda > 0,\ \forall\ (x,y) \in\ E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle.$$

2) Prouver que si f est une similitude de E, alors f est un automorphisme de E.

3) Etablir que si f est une similitude de E de rapport λ, alors f^{-1} est une similitude de E dont on précisera le mystérieux rapport.

4) On note $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E. Etablir que $(\mathrm{Sim}(E), \circ)$ est un groupe.