

CB2 du 20/01 : Physique (4h)

Solution de l'exercice 1 : Observation du Fort Boyard

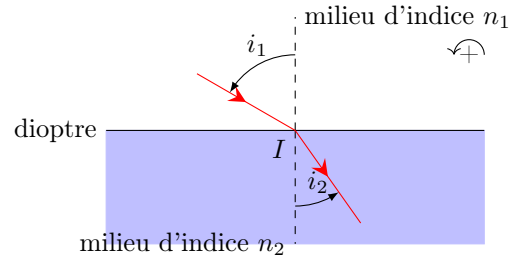
Q.1 La loi de Snell-Descartes de la réfraction est :

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

où

- n_1 est l'indice optique du milieu 1 ;
- n_2 est l'indice optique du milieu 2 ;
- i_1 est l'angle d'incidence entre le rayon incident et la normale au dioptre dans le milieu 1 ;
- i_2 est l'angle de réfraction entre le rayon réfracté

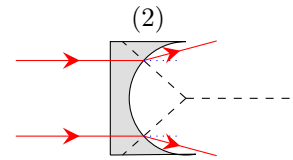
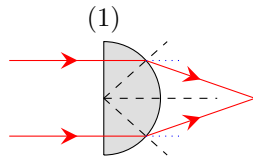
et la normale au dioptre dans le milieu 2.



Q.2 Lors de la réfraction air \rightarrow verre : le dioptre est plan et l'incidence des rayons normale donc pas de déviation ($i_1 = 0 \implies i_2 = 0$).

Lors de la réfraction verre \rightarrow air : $n \sin(i_1) = \sin(i_2)$

comme $n > 1 \implies i_2 > i_1$ donc le rayon s'écarte de la normale.



Q.3 On voit que dans le cas de la lentille concave (1) le faisceau de rayons parallèle convergent, c'est donc une lentille convergente.

On voit que dans le cas de la lentille convexe (2) le faisceau de rayons parallèle diverge, c'est donc une lentille divergente.

Q.4 Le système est afocal ce qui signifie que pour un objet A_∞ sur l'axe optique à l'infini, l'image définitive A'_∞ est à l'infini sur l'axe optique. Une image intermédiaire A_1 sur l'axe optique est produite :

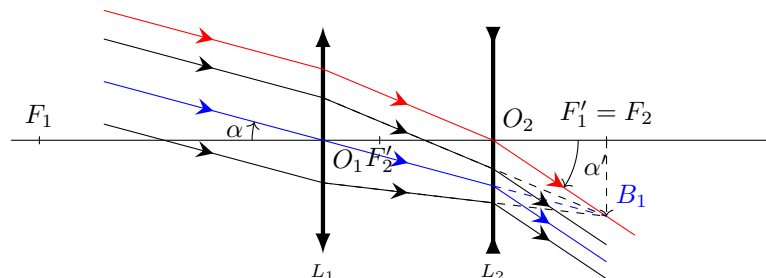
$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

or comme A_∞ est à l'infini sur l'axe optique : $A_1 = F'_1$ par définition du foyer principal image.

or comme A'_∞ est à l'infini sur l'axe optique : $A_1 = F_2$ par définition du foyer principal objet.

$$F'_1 = F_2 \implies l = \overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F_2 O_2} = f'_1 + f'_2 \quad \text{et } f'_2 < 0 \implies l = f'_1 - |f'_2|$$

Q.5 Soit le schéma suivant :



Q.6 L'image apparaît droite car α et α' sont orienté dans le même sens.

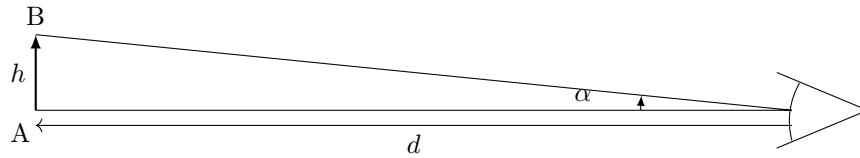
Q.7 Dans les conditions de Gauss, on a $\alpha \ll 1$ et $\alpha' \ll 1$ on a donc d'après le schéma :

$$\tan(\alpha') = \frac{\overline{A_1 B_1}}{|f'_2|} \approx \alpha' \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_1} \approx \alpha \implies G = \frac{f'_1}{|f'_2|}$$

Q.8 Soit $f'_1 = G|f'_2| \implies l = f'_1 - |f'_2| = (G - 1)|f'_2| \implies |f'_2| = \frac{l}{G - 1}$ et $f'_1 = \frac{Gl}{G - 1}$

AN : $|f'_2| \simeq 1,3 \text{ cm}$ et $f'_1 \simeq 26,3 \text{ cm}$

Q.9 Le diamètre apparent α du fort de hauteur h vu à une distance d :



On a alors $\tan(\alpha) = \frac{h}{d}$ AN : $\tan(\alpha) \simeq 6,66 \times 10^{-3} \ll 1$ et $\alpha' \simeq G\alpha$ AN : $\alpha' \simeq 1,33 \times 10^{-1}$

les conditions de Gauss sont bien vérifiées pour L_1 moins pour L_2 .

Solution de l'exercice 2 : Le voyage entre la Terre et Mars

Q.1 Soit $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{r^2} \vec{u}_r$ d'où $\|\vec{F}\| = \frac{\mathcal{G}M_S m}{r^2}$ donc $[F] = [\mathcal{G}]M^2L^{-2}$ or $[F] = MLT^{-2}$

$$[\mathcal{G}] = L^3T^{-2}M^{-1} \quad \text{en } m^3 \cdot s^{-2} \cdot kg^{-1}$$

Q.2 Système : $\{M(m)\}$

Référentiel : Héliocentrique supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{r^2} \vec{u}_r$ soit $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

TMC : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \implies \vec{L}_O = \vec{C}^{te}$

Q.3 Soit $\vec{L}_O = L_O \vec{u}_z = m\vec{OM} \wedge \vec{v} \implies \vec{OM} \perp \vec{u}_z \forall t$ et $\vec{v} \perp \vec{u}_z \forall t$ le mouvement est alors plan.

On a alors : $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$

$$\vec{L}_O = m \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = mr^2\dot{\theta} \vec{u}_z \implies \mathcal{C} = \frac{L_O}{m} \text{ la constante des aires.}$$

Q.4 Soit $r = R = C^{te}$ donc $\mathcal{C} = R^2\dot{\theta} = C^{te} \implies \dot{\theta} = C^{te}$.

On calcule alors : $\vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = V \vec{u}_\theta$ avec $V = C^{te}$ (mouvement uniforme)

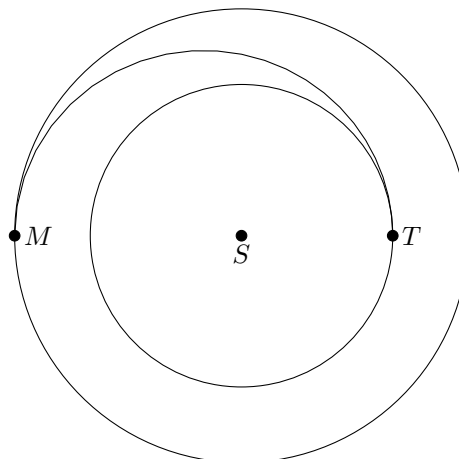
PFD : $ma(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{F} \implies -mR\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\mathcal{G} \frac{M_S m}{R^2} \vec{u}_r$

on projette sur \vec{u}_r : $R^2\dot{\theta}^2 = \mathcal{G} \frac{M_S}{R} = V^2 \implies V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}$ AN : $V_T = 2,98 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $V_M = 2,42 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q.5 $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{\mathcal{G}M_S m}{2R}$ d'où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{G}M_S m}{2R} - \frac{\mathcal{G}M_S m}{R} \implies \mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{2R}$

Q.6 Le mouvement est uniforme donc $V = \frac{2\pi R}{T} \implies \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \implies \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$

Q.7 Soit $2a = a_T + a_M$ le grand axe de l'ellipse de transfert :



Q.8 Soit $\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{2a} = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{a_M + a_T}$ et $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mV_T'^2 - \frac{\mathcal{G}M_S m}{a_T}$ sachant que $V_T'^2 = \frac{\mathcal{G}M_S}{a_T}$:

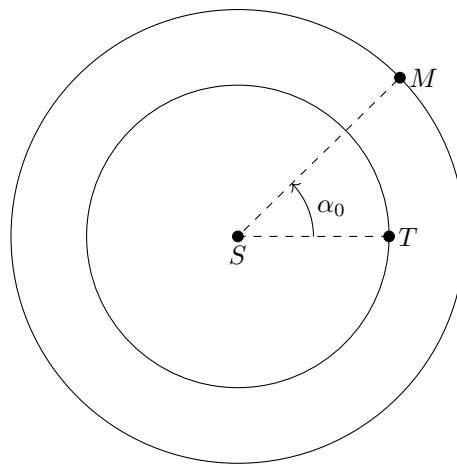
$$-\frac{a_T V_T'^2}{a_M + a_T} = \frac{1}{2}V_T'^2 - \frac{a_T v_T'^2}{a_T} \implies V_T' = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}}$$

Soit $\Delta V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1 \right)$ AN : $\Delta V_T = 2,93 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q.9 Soit $\Delta t = T/2 = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_S}}$ AN : $\Delta t = 2,23 \times 10^7 \text{ s} \simeq 259 \text{ jour}$

Q.10 Soit $\alpha_0 = \theta_M(0) - \theta_T(0) = \theta_M(0)$ car on pose $\theta_M(0)$. On définit $\theta_V(t)$ l'angle de l'orbite du vaisseau, et on sait que $\theta_V(T/2) = \theta_M(T/2) = \pi$. Comme le mouvement est uniforme on a :

$$\theta_M(t) = \frac{2\pi}{T_M}t + \theta_M(0) \implies \pi = \frac{2\pi}{T_M} \frac{T}{2} + \theta_M(0) \implies \alpha_0 = 0,77 \text{ rad} = 44,4^\circ$$



Q.11 $T = 2\Delta t > T_T$ la Terre ne sera pas présente pour réceptionner les voyageurs...

Solution de l'exercice 3 : Chauffage de l'eau contenue dans la cuve

Q.1 Système = { $V = 200 \text{ L}$ d'eau } assimilé à une phase condensée idéale tel que :

$$\Delta U \simeq \Delta H = C_e \Delta T = m_e c_e (T_{e2} - T_{e1}) \text{ où } m_e = \rho_e V$$

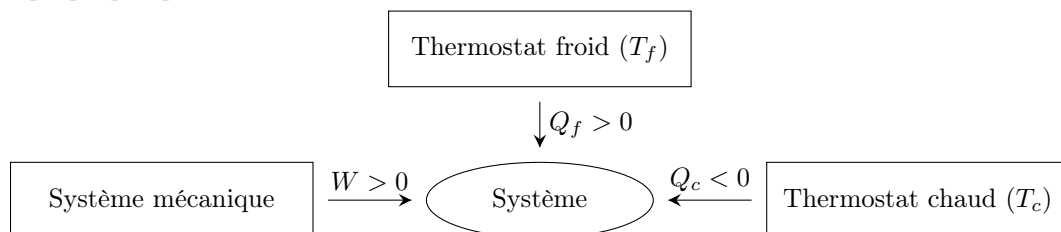
Premier principe de la thermo : $\Delta U = W + Q$ où $W = 0$ car incompressible.

Soit $Q = \rho_e V c_e (T_{e2} - T_{e1})$ AN : $Q \simeq 4,18 \times 10^7 \text{ J}$

Q.2 Avec une puissance électrique $P = 2000 \text{ W}$, on en déduit le temps nécessaire Δt pour chauffer l'eau :

$$\Delta t = \frac{Q}{P} \quad \text{AN : } \Delta t \simeq 20\,900 \text{ s} \simeq 5,8 \text{ h} \simeq 5 \text{ h} 48 \text{ min}$$

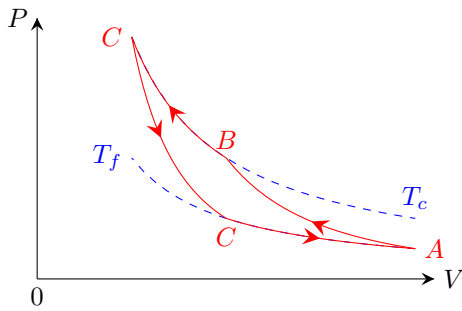
Q.3 Schéma synoptique pompe à chaleur ditherme :



Q.4 La source froide correspond à l'air environnant du cellier/lingerie/garage à la température $T_f = T_a = 280 \text{ K}$
 La source chaude correspond à l'eau chaude correspond à l'eau du chauffe-eau à la température $T_{e2} = 338 \text{ K}$.

Q.5 Le cycle de Carnot est constitué de $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ isothermes réversibles aux températures } T_c \text{ et } T_f \\ 2 \text{ adiabatiques réversibles (isentropiques)} \end{array} \right.$

Q.6 Cycle dans le diagramme (p, V) :



AB : compression adiabatique réversible GP

BC : compression isotherme réversible à T_c du GP

CD : détente adiabatique réversible GP

CA : détente isotherme réversible à T_f du GP

Cycle parcouru dans le sens **trigo** \implies **récepteur** ($W > 0$)

En bleu, les isothermes T_0 et T_1 passant par A et C

Q.7 Premier principe sur un cycle réversible : $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_f + Q_c$ et $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 \implies Q_c + Q_f = -W$

Q.8 Second principe sur un cycle réversible : $\Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{ech}} + S_{\text{cr}}$ et $\Delta S_{\text{cycle}} = 0$ soit $S_{\text{ech}} = 0 \implies \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$

Q.9 Par définition l'efficacité de la PAC : $COP = \frac{-Q_c}{W}$

Q.10 Pour une machine réversible : $COP = COP_{\text{max}} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}}$

$$COP_{\text{max}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Q.11 AN : $COP_{\text{max}} \simeq 5,8$

Q.12 Théorème de Carnot : $COP < COP_{\text{max}}$ à cause des irréversibilités.

Q.13 L'efficacité de la PAC augmente lorsque la différence de température entre les 2 sources **diminue** et max lorsque $T_c \rightarrow T_f$.

Solution de l'exercice 4 : Des vagues au système mécanique

Q.1 Les 3 forces à considérer avec $\theta = 0$ sont :

- le poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$
- la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}_A = \rho_e V g \vec{u}_z$
- la force de contact : $\vec{R}_N = -\|\vec{R}_N\| \vec{u}_z$

On applique alors le principe fondamental de la statique :

$$\vec{P} + \vec{\Pi}_A + \vec{R}_N = \vec{0} \implies \|\vec{\Pi}_A\| > \|\vec{P}\| \iff \rho_e V > m$$

Q.2 Moments des forces s'exerçant sur le solide (S) par rapport à l'axe (Oy) :

- \vec{R}_N passe par le point O (liaison pivot idéale)

d'où : $\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{R}_N) = 0$

- $\vec{P} = m\vec{g}$ s'applique au point G d'où $\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) = \pm d_1 \|\vec{P}\|$ où $d_1 = OH_1 = d \sin(\theta)$ est le bras de levier, en utilisant la règle de la main droite on voit :

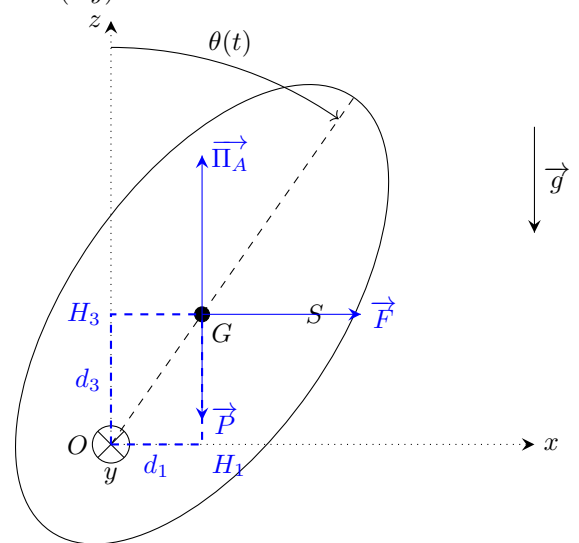
$$\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) = +mgd \sin(\theta)$$

- $\vec{\Pi}_A = \rho_e V g \vec{u}_z$ s'applique au point G d'où $\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{\Pi}_A) = \pm d_2 \|\vec{\Pi}_A\|$ où $d_2 = d_1$ est le bras de levier, en utilisant la règle de la main droite on voit :

$$\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{\Pi}_A) = -\rho_e V g d \sin(\theta)$$

- $\vec{F} = \beta \cos(\omega t) \vec{u}_x$ s'applique au point G d'où $\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{F}) = \pm d_3 \|\vec{F}\|$ où $d_3 = OH_3 = d \cos(\theta)$ est le bras de levier, en utilisant la règle de la main droite on voit :

$$\mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{F}) = +\beta d \cos(\theta) \cos(\omega t)$$



- Couple résistant exercé sur l'axe de rotation : $\vec{C} = -\alpha\dot{\theta}\vec{u}_y \implies C = -\alpha\dot{\theta}$

Q.3 Système : {solide (S)}

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

BAME : voir Q.2

TMC scalaire : $\left. \frac{dL_{\Delta}(S)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = J_{\Delta}\ddot{\theta} = C + \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{R}_N) + \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{\Pi}_A) + \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{F})$

$$J\ddot{\theta}(t) + \alpha\dot{\theta} + (\rho_e V - m)gd \sin(\theta) = \beta d \cos(\theta) \cos(\omega t)$$

Q.4 Dans l'approximation des petits angles c-à-d $\theta \ll 1$ on effectue les DL₁ : $\left. \begin{array}{l} \sin(\theta) \simeq \theta \\ \cos(\theta) \simeq 1 \end{array} \right\}$

On obtient alors l'EDL₂ : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J}\dot{\theta} + \frac{(\rho_e V - m)gd}{J}\theta = \frac{\beta d}{J} \cos(\omega t)$

On identifie alors : $\omega_0^2 = \frac{(\rho_e V - m)gd}{J} \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}}$, $\lambda = \frac{\alpha}{J}$ et $f(t) = \frac{\beta d}{J} \cos(\omega t)$.

Q.5 On réécrit alors l'EDL₂ en notations complexes : $\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{\beta d}{J} e^{j\omega t} \iff -\omega^2\theta + j\omega\lambda\theta + \omega_0^2\theta = \frac{\beta d}{J} e^{j\omega t}$

$$\iff [\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\lambda]\theta = \frac{\beta d}{J} e^{j\omega t} \iff |[\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\lambda]||\theta| = \left| \frac{\beta d}{J} e^{j\omega t} \right| \iff \theta_0(\omega) = \frac{\frac{|\beta|d}{J}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2}}$$

Q.6 Soit $P_r(t) = \gamma\dot{\theta}^2(t)$ la puissance récupérée instantanée avec $\dot{\theta}(t) = -\omega\theta_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$

$$P_r(t) = \gamma\omega^2\theta_0^2(\omega) \sin^2(\omega t + \varphi) \implies P_m = \langle P_r(t) \rangle = \gamma\omega^2\theta_0^2(\omega) \underbrace{\langle \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle}_{=1/2} \implies P_m = \frac{1}{2}\gamma\omega^2\theta_0^2(\omega)$$

Avec $\theta_0(\omega)$: $P_m = \frac{\gamma\beta^2 d^2}{2J^2} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\lambda^2}$

Q.7 Pour tracer l'allure on étudie les limites

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\omega \rightarrow 0} P_m(\omega) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} P_m(\omega) = 0 \end{array} \right\}$$

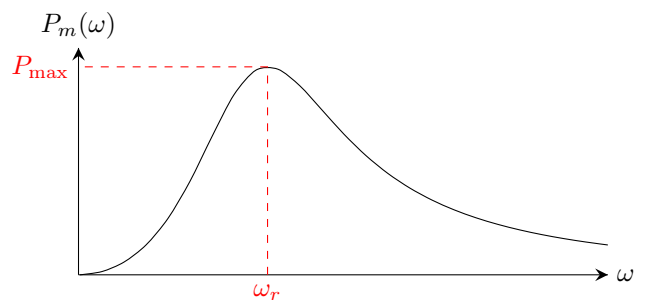
On met $P_m(\omega)$ sous la forme :

$$P_m = \frac{\gamma\beta^2 d^2}{2J^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + \lambda^2}$$

On passe par un maximum $P_{\max} = P_m(\omega_r)$ tel que

$$\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{\omega_r}\right)^2 = 0 \iff \omega_r = \omega_0$$

soit $\omega_r = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}}$ et $P_{\max} = \frac{\gamma\beta^2 d^2}{2J^2\lambda^2}$



Q.8 AN : avec $J \simeq md^2$ on a $\omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_e V - m)gd}{J}} \implies \omega_0 \simeq 1,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \implies T_0 \simeq 4,1 \text{ s}$

... FIN ...