Problème de la semaine 1

Exercice 1 — (Fonctions hyperboliques) On définit les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** (respectivement notées ch et sh) en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1/ **Questions préliminaires.**

a/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.

2/ Etudier les fonctions ch et sh : ensemble de définition, éventuelle parité, dérivabilité, dérivée, limites aux bornes, tableau de variation, tangente au point d'abscisse 0, et position relative de la courbe représentative par rapport à cette tangente.

3/ Etudier la position relative des courbes représentatives des fonctions ch et sh.

4/ Sur un même graphique, donner l'allure des courbes de ch et sh (on n'oubliera pas de faire apparaître les tangentes au point d'abscisse 0).

5/ On définit la fonction **tangente hyperbolique** (notée th) en posant : $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Etudier la fonction th : ensemble de définition, éventuelle parité, dérivabilité, dérivée, limites aux bornes, tableau de variation, tangente au point d'abscisse 0, asymptotes, et position relative de la courbe représentative par rapport à cette tangente.

6/ **Antécédents**.

a/ Soit λ un réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_\lambda) \qquad \mathrm{ch}(x) = \lambda$.

b/ Soit λ un réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(F_\lambda) \qquad \mathrm{sh}(x) = \lambda$.