Colle 1 — Questions de cours

Question de cours 1 — Décomposition paire + impaire (existence) : toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$

Preuve. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

➤ Analyse : supposons qu'il existe deux fonctions g et h, définies sur $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$. Il revient au même d'écrire : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$.

On a également : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(-x) + h(-x)$.

D'où (g étant paire et h impaire) : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$.

On a ainsi obtenu le système : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$, dont la résolution aisée * donne :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

➤ Synthèse : à la lumière de ce qui précède, on définit donc g et h sur $\mathbb{R}$ en posant judicieusement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Il est alors clair que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$. Donc : $\boxed{f = g + h}$.

En outre : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$ d'où $\boxed{g \text{ est paire}}$.

Et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$ d'où $\boxed{h \text{ est impaire}}$.

Conclusion. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe un couple (g, h) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire, telles que : $f = g + h$

Question de cours 2 — Propriété (Extrait du DS1). $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$

Preuve. Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$, et d'autre part $\dfrac{0 \times (0+1)}{2} = 0$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (H.R). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1) = \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\,(n+1) + 2\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$, cette égalité signifiant que $P\,(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$

---

*. Il suffit de faire l'addition et la soustraction des deux lignes du système.

Question de cours 3 — Propriété (somme des cubes). $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Preuve. ~~Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$~~ (phrase d'encouragement non-indispensable).

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$, et d'autre part $\dfrac{0^2\,(0+1)^2}{4} = 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2 + 4\,(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\,\left(n^2+4n+4\right)}{4}$$

Soit finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$, cette égalité signifiant que $P\,(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ **Conclusion** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Question de cours 4 — Propriété (somme des termes d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$.

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$, et d'autre part $u_0 \times \dfrac{1-q}{1-q} = u_0$. D'où $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Soit finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, cette égalité signifiant que $P\,(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ **Conclusion** : si $q \neq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Banque d'exercices

Exercice 1 — (Opérations sur les ensembles). Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que :

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

Exercice 2 — (Double implication et double inclusion). Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que :

$$[A \cup B = A \cap B] \Longleftrightarrow [A = B]$$

Exercice 3 — (Pas par récurrence !). Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Exercice 4 — (Récurrence simple). On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \pi$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (n+1)^2 u_n$$

Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2 \pi$

Exercice 5 — (Récurrence double). Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n + 4^n$

Banque d'exercices - Corrigés

Remarque. *Le jour de la colle, il ne sera pas nécessaire de faire un parfait copier-coller des corrigés proposés ici pour "avoir tout bon". En particulier, il sera totalement superflu d'écrire sur votre tableau les indications écrites en italique dans ces corrections. Ces indications ne sont présentes que pour vous aider au besoin à comprendre le plan d'une démo (notamment dans le corrigé de l'exo 2), ou à comprendre le passage d'une ligne à une autre (par exemple dans le corrigé de l'exo 1).*

Exercice 1 — (Opérations sur les ensembles). Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que :

$$A\backslash (B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$$

Soient A, B et C trois parties de E. On a :

$$\begin{aligned} A\backslash (B\cap C) &= A\cap \overline{(B\cap C)} && \textit{(par définition)} \\ &= A\cap \left(\overline{B}\cup\overline{C}\right) && \textit{(loi de Morgan pour les ensembles)} \\ &= \left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap\overline{C}\right) && \textit{(distributivité)} \\ &= (A\backslash B)\cup(A\backslash C) && \textit{(par définition)} \end{aligned}$$

Conclusion. $A\backslash (B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

Exercice 2 — (Double implication et double inclusion). Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que :

$$[A\cup B = A\cap B] \Longleftrightarrow [A = B]$$

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Notons P l'assertion : $A\cup B = A\cap B$. Et notons Q l'assertion : $A = B$.

Stratégie. On souhaite prouver l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$. A cette fin, on se propose de prouver l'implication $P \Longrightarrow Q$, puis l'implication réciproque $Q \Longrightarrow P$ (raisonnement par double implication).

➤ **Preuve de l'implication $P \Longrightarrow Q$.**

Supposons que P est vraie, càd que : $A\cup B = A\cap B$.

Stratégie. Sous cette hypothèse, on souhaite prouver que Q est vraie, càd que $A = B$. Comme il s'agit d'une égalité entre ensembles, on se propose de prouver les inclusions $A\subset B$ et $B\subset A$, pour en déduire l'égalité $A = B$ à l'aide de la règle de double inclusion.

Soit x un élément de E :

- Si $x\in A$, alors $x\in A\cup B$ (car QPLPPLM). Donc $x\in A\cap B$ (hypothèse). En particulier $x\in B$.
  Ainsi : $(x\in A)\Longrightarrow(x\in B)$. Donc : $A\subset B$ $(\spadesuit)$
- Si $x\in B$, alors $x\in A\cup B$ (car QPLPPLM). Donc $x\in A\cap B$ (hypothèse). En particulier $x\in A$.
  Ainsi : $(x\in B)\Longrightarrow(x\in A)$. Donc : $B\subset A$ $(\clubsuit)$

  Remarque. Dans les quatre lignes précédentes, la deuxième petite preuve ("Si $x\in B\ldots$") est un copier-coller-adapter de la première. Il n'est pas nécessaire de la détailler : on peut la justifier à l'aide de la première, et en observant que A et B jouent des rôles symétriques dans ce problème.

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et la règle de double inclusion : $A = B$.

En résumé, on vient de prouver l'implication : $[A\cup B = A\cap B]\Longrightarrow[A = B]$ (càd $P\Longrightarrow Q$).

➤ **Preuve de l'implication (réciproque) $Q \Longrightarrow P$.**

Supposons que Q est vraie, càd que : $A = B$.

Sous cette hypothèse, on a d'une part $A\cup B = A\cup A = A$; et d'autre part $A\cap B = A\cap A = A$.
Donc : $A\cup B = A\cap B$.

En résumé, on vient de prouver l'implication : $[A = B]\Longrightarrow[A\cup B = A\cap B]$ (càd $Q\Longrightarrow P$).

➤ **Conclusion.** $[A\cup B = A\cap B]\Longleftrightarrow[A = B]$ (càd $P\Longleftrightarrow Q$)

Exercice 3 — (Pas par récurrence !). Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Soient x un réel, et soit n un entier naturel.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-x^2\right)^k$. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $(-x^2)$ (donc différente de 1).

Donc : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1-(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

Conclusion. $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$

Exercice 4 — (Récurrence simple). On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \pi$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = (n+1)^2\, u_n$$

Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2\, \pi$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion : $u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2\, \pi$

➤ Initialisation ($n = 0$). D'une part : $u_1 = \pi$. D'autre part : $2^0 (0!)^2 \pi = \pi$. Donc $P(0)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$\begin{aligned}
& u_{2n+3} = u_{(2n+1)+2} \\
\iff\ & u_{2n+3} = (2n+2)^2\, u_{2n+1} \qquad \text{(selon l'énoncé)} \\
\iff\ & u_{2n+3} = (2n+2)^2\, 2^{2n} (n!)^2\, \pi \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
\iff\ & u_{2n+3} = 2^2 (n+1)^2\, 2^{2n} (n!)^2\, \pi \\
\iff\ & u_{2n+3} = 2^{2n+2} \left((n+1)!\right)^2 \pi
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2\, \pi$

Exercice 5 — (Récurrence double). Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n + 4^n$

Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 3^n + 4^n$.

➤ Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). On a : $u_0 = 2$ (énoncé) et $3^0 + 4^0 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 7$ (énoncé) et d'autre part $3^1 + 4^1 = 7$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \qquad \text{(selon l'énoncé)}$$

$$\iff u_{n+2} = 7\left(3^{n+1} + 4^{n+1}\right) - 12\left(3^n + 4^n\right) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$\iff u_{n+2} = 21 \times 3^n + 28 \times 4^n - 12 \times 3^n - 12 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 9 \times 3^n + 16 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3^2 \times 3^n + 4^2 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3^{n+2} + 4^{n+2}$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n + 4^n$