

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°1 — 7 SEPTEMBRE 2024

- *La durée du devoir est de 1 heure environ, tout matériel électronique est interdit.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 5 exercices.*
- *N'oubliez d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question.*

Barème indicatif : les exercices 1, 2, 3 et 4 sont sur 4pts chacun ; l'exercice 5 est sur 7 points.

EXERCICE 1 — (LOGIQUE)

Soient P et Q deux assertions logiques. **A l'aide d'une table de vérité**, démontrer que :

$$\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

EXERCICE 2 — (QUANTIFICATEURS)

Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cette notation signifie que f est une fonction définie sur \mathbb{R} , et à valeurs réelles.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite entre parenthèses).

a/ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$ (*la fonction f ne s'annule pas sur \mathbb{R}*)

b/ $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ (*la fonction f est bornée sur \mathbb{R}*)

c/ $\forall \beta \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|y - x| \leq \alpha) \implies (|f(y) - f(x)| \leq \beta)$

(la fonction f est uniformément continue sur \mathbb{R})

2/ Dans cette question, x et y désignent deux nombres réels. Ecrire la réciproque, la contraposée, et la négation de l'implication

$$[y > x] \implies [f(x) < f(y)]$$

EXERCICE 3 — (RÉCURRENCE)

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 4 — (A PROPOS D'ENSEMBLES)

➤ **Notations et rappels.** Dans cet exercice, on considère un ensemble E quelconque.

On rappelle que, pour A et B deux parties de E , la différence de A par B est la partie de E définie par :

$$A \setminus B = \{x \in E, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Il revient au même d'écrire : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

➤ **Question.** Soient A , B et C trois parties de E . Démontrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

EXERCICE 5 — (UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE)

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur $\underline{\mathbb{N}}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(n + m) = f(n) + f(m) \quad (\square)$$

Pour y parvenir, on se propose de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

1/ Analyse. Tout au long de cette question, on suppose qu'il existe une solution au problème, c'est à dire qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (\square) énoncée ci-dessus.

a/ Etablir que $f(0) = 0$.

b/ Etablir que $f(2) = 2 \times f(1)$. Puis exprimer $f(3)$ en fonction de $f(1)$, en justifiant votre réponse.

c/ Etablir qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \lambda n$$

2/ Synthèse. A l'aide de ce qui précède, déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition (\square) .