Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}1 — 7 septembre 2024

Exercice 1 — (Logique)

Soient P et Q deux assertions logiques. **A l'aide d'une table de vérité**, démontrer que :

$$\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$$

Soient P et Q deux assertions logiques. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$	$\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}}$	$\overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V

Les assertions $\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}}$ et $\overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$ prennent simultanément les mêmes valeurs de vérité : elles sont donc logiquement équivalentes.

Conclusion. $\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$

Exercice 2 — (Quantificateurs)

Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cette notation signifie que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite entre parenthèses).

a/ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$ *(la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)*

Réponse : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

b/ $\exists\, M \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$ *(la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$)*

Réponse : $\forall\, M \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > M$

c/ $\forall\, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|y-x| \leqslant \alpha) \Longrightarrow (|f(y) - f(x)| \leqslant \beta)$

(la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$)

Réponse : $\exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (|y-x| \leqslant \alpha) \wedge (|f(y) - f(x)| > \beta)$

2/ Dans cette question, x et y désignent deux nombres réels. Ecrire la réciproque, la contraposée, et la négation de l'implication

$$[y > x] \Longrightarrow [f(x) < f(y)]$$

Juste pour rappeler le cours (ce qui n'était pas exigé dans votre copie), l'implication $P \Longrightarrow Q$ admet pour réciproque l'implication $Q \Longrightarrow P$, pour contraposée l'implication $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$, et pour négation l'assertion $P \wedge \overline{Q}$.

On répond à présent à la question de l'exo.

Réciproque : $[f(x) < f(y)] \Longrightarrow [y > x]$

Contraposée : $[f(x) \geqslant f(y)] \Longrightarrow [y \leqslant x]$

Négation : $[y > x] \wedge [f(x) \geqslant f(y)]$

Exercice 3 — $\boxed{\textbf{(Récurrence)}}$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

Initialisation. D'une part : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0$. D'autre part : $\dfrac{0 \times (0+1)}{2} = 0$

D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1 = \frac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n\,(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$$

La première égalité ci-dessus provient de la relation de Chasles pour les sommes, et la seconde de l'hypothèse de récurrence. Au final, on a établi que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$

Exercice 4 — **(A propos d'ensembles)**

➢ **Notations et rappels**. Dans cet exercice, on considère un ensemble E quelconque.
On rappelle que, pour A et B deux parties de E, la différence de A par B est la partie de E définie par :

$$A\backslash B = \{x \in E, \ (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

Il revient au même d'écrire : $A\backslash B = A \cap \overline{B}$.

➢ **Question**. Soient A, B et C trois parties de E. Démontrer que :

$$A\backslash (B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$$

Soient A, B et C trois parties de E. On a :

$$\begin{aligned} A\backslash (B \cap C) &= A \cap \overline{(B \cap C)} && \textit{(définition rappelée dans l'énoncé)} \\ &= A \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right) && \textit{(loi de Morgan pour les ensembles)} \\ &= \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{C}\right) && \textit{(distributivité)} \\ &= (A\backslash B) \cup (A\backslash C) && \textit{(définition de l'énoncé)} \end{aligned}$$

Conclusion. $A\backslash (B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$

Exercice 5 — **(Une équation fonctionnelle)**

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur $\underline{\underline{\mathbb{N}}}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall\ (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ f\,(n + m) = f(n) + f(m) \qquad (\square)$$

Pour y parvenir, on se propose de faire un raisonnement par analyse-synthèse.

1/ **Analyse**. Tout au long de cette question, on suppose qu'il existe une solution au problème, c'est à dire qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition $(\square)$ énoncée ci-dessus.

a/ Etablir que $f(0) = 0$.

Par hypothèse, la fonction f est telle que : $\forall\ (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ f\,(n + m) = f(n) + f(m)$.

En particulier : $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. On en déduit que : $f(0) = 2f(0)$. Il s'ensuit que : $f(0) = 0$.

Conclusion. $f(0) = 0$

b/ Etablir que $f(2) = 2 \times f(1)$. Puis exprimer $f(3)$ en fonction de $f(1)$, en justifiant votre réponse.

Toujours par hypothèse : $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2 \times f(1)$.

Puis : $f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2 \times f(1) + f(1) = 3 \times f(1)$.

Conclusion. $f(2) = 2 \times f(1)$ et $f(3) = 3 \times f(1)$

c/ Etablir qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n$$

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ l'assertion : $f(n) = n \times f(1)$.

Initialisation. D'après la question 1-a : $f(0) = 0 = 0 \times f(1)$. D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = n \times f(1) + f(1) = (n+1) \times f(1)$$

La première égalité ci-dessus provient de la relation ($\square$), et la seconde de l'hypothèse de récurrence. On a ainsi établi que : $f(n+1) = (n+1) \times f(1)$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n \times f(1)$

Il existe donc un réel λ (avec $\lambda = f(1)$) tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n$

2/ **Synthèse**. A l'aide de ce qui précède, déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition ($\square$).

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs réelles. Prouvons l'équivalence :

$$[f \text{ satisfait la condition } (\square)] \Longleftrightarrow [\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n]$$

A cette fin, on se propose de raisonner par double implication.

➤ Preuve du sens direct ($\Longrightarrow$).

Supposons que f satisfait la condition ($\square$).

Alors d'après la question 1-c, il existe un réel λ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n$.

Ainsi : $[f \text{ satisfait la condition } (\square)] \Longrightarrow [\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n]$ $(\spadesuit)$

➤ Preuve de la réciproque ($\Longleftarrow$).

Supposons que : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n$.

Alors pour tout couple d'entiers naturels (n, m) on a :

$$f(n+m) = \lambda(n+m) = \lambda n + \lambda m = f(n) + f(m)$$

Ainsi : $\forall\ (n, m) \in \mathbb{N}^2,\ f(n+m) = f(n) + f(m)$. La fonction f satisfait donc la condition ($\square$).

En résumé, on a établi que : $[\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n] \Longrightarrow [f \text{ satisfait la condition } (\square)]$ $(\clubsuit)$

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$[f \text{ satisfait la condition } (\square)] \Longleftrightarrow [\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n]$$

En d'autres termes, l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition ($\square$) est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un réel λ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \lambda n$.