EXERCICES 2 – RÉCURRENCE & MÉTHODES ALGÉBRIQUES

EXERCICE 1. — Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \dfrac{4!}{2!}$

2) $B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!}$

3) $C = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

4) $D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!}$

5) $E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

6) $F = \dfrac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

EXERCICE 2. — Soit (u_n) la suite réelle donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.
2) A l'aide de la question précédente, conjecturer l'expression du terme général u_n en fonction de n. Puis démontrer cette conjecture.

EXERCICE 3. — Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n$.

EXERCICE 4. — **(Suite de Wallis)**. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$.

Etablir que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

EXERCICE 5. — Montrer par récurrence sur n la propriété suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

SOMMES

EXERCICE 6. — Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$; $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} i$; $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n$.

EXERCICE 7. — Parmi les formules ci-dessous, déterminer lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{d=1}^{n} b_d$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} b_j$

e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j^N = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^N$

f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

EXERCICE 8. — Soit $q \in \mathbb{C}$, et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} q^k$.

EXERCICE 9. — Soit $q \in \mathbb{C}$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{2k}$.

EXERCICE 10. — Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$

EXERCICE 11. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,(k+2)$.

Exercice 12. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-k+1\right)(k+1)$.

Exercice 13. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)}$.

Exercice 14. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+2)}$.

Exercice 15. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}$.[1]

Exercice 16. — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

Exercice 17. — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$. Etudier le sens de variation, puis prouver la convergence de cette suite.

Exercice 18. — Pour $q\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $n\in\ \mathbb{N}$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kq^k$.

En calculant qS_n-S_n, déterminer la valeur de S_n.

Exercice 19. — Etablir que pour tout entier $n\geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2}\leqslant\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.

En déduire que pour tout entier naturel N non nul on a : $1\leqslant\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant 2$.

Exercice 20. — 1) Prouver que pour tout entier non-nul n, $\ln(n+1)-\ln n\leqslant\dfrac{1}{n}$

2) En déduire que pour tout entier non-nul N, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\geqslant\ln(N+1)$

3) En déduire la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $S_N=\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$.

Exercice 21. — Soit x un nombre réel différent de -1. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{1+x}=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\right]+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$$

Exercice 22. — Calculer $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij$.

Exercice 23. — Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i2^j$.

---

1. On pourra déterminer trois réels a, b et c tels que : $\dfrac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.

Exercice 24. — Soit z un complexe quelconque. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} z^{i+j}$ (c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z^{i+j}$)

Produits

Exercice 25. — Soit n un entier $\geqslant 2$. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$, puis le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Exercice 26. — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Factorielles

Exercice 27. — $\star$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 28. — $\star$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k\times k!)$

Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice 29. — Soit n un entier naturel. Calculer : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}$

Exercice 30. — Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

Exercice 31. — 1) Soient n et p dans $\mathbb{N}$, avec $1\leqslant p\leqslant n$. Montrer que : $p\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$

2) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}p\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}=n2^{n-1}$

Exercice 32. — Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et soit x un réel quelconque. Calculer : $S(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

Exercice 33. — Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et soit x un réel quelconque. Calculer : $S(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k(1-x)^{3n-2k}x^k$

Extraits de DS

Exercice 34. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\dfrac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+5}u_n$$

1/ Calculer les valeurs de u_1 et u_2.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$$

Exercice 35. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n\,(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$

Exercice 36. — (Sommes)

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$.

2/ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^{\,n}\,\mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{ch}^n\,(x)$$

Exercice 37. — (Coefficients binomiaux)

Lorsque l'on considère une ligne de rang pair du triangle de Pascal, on peut observer que le plus grand coefficient binomial est situé au milieu de la ligne.

*Par exemple, la ligne "2" du triangle de Pascal est : 1 – **2** – 1 ; et la ligne "4" est : 1 – 4 – **6** – 4 – 1.*

L'objectif de cet exercice est de donner la preuve de cette observation.

Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Pour tout entier naturel k, on pose :

$$u_k = \binom{2n}{k}$$

1/ Donner sans justification les valeurs de u_0, u_1, et u_2.

2/ Que vaut u_k lorsque $k \geqslant 2n+1$?

3/ Soit $k \in [\![\, 0, 2n-1 \,]\!]$. Etablir que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2n-k}{k+1}$$

4/ En déduire que :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \quad \text{et} \quad u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant u_{2n}$$