Problème de la semaine 2
(corrigé en ligne lundi 16/09)

Exercice 1 — (Equation fonctionnelle)
L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies sur $\underline{\underline{\mathbb{Q}}}$ et à valeurs réelles telles que :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ f\,(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (\square)$$

Au passage, on rappelle que $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1/ Tout au long de cette question, on suppose qu'il existe une solution au problème, c'est à dire qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition $(\square)$ énoncée ci-dessus.

a/ Etablir que $f(0) = 0$.

b/ Etablir que f est impaire.

c/ Etablir que :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x)$$

d/ En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$

e/ En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ f(n) = nf(1)$

f/ En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) = xf(1)$

2/ A l'aide de la question 1, déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la condition $(\square)$.

Exercice 2 — (Sommes) Soit n un entier naturel non nul.

1/ Calculer la somme :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n} k^2$$

2/ Calculer la somme :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k\, k^2$$