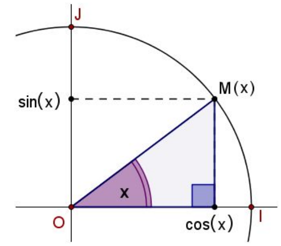
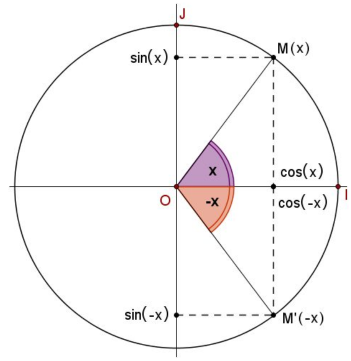
Formulaire de trigonométrie

<u>Note</u> : les formules données sur cette page sont valables pour tout nombre réel x.



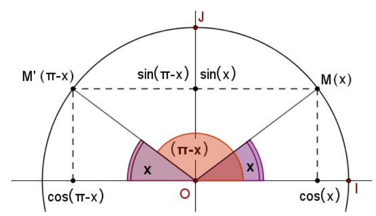
Relation fondamentale : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Remarque : c'est une conséquence du théorème de Pythagore.



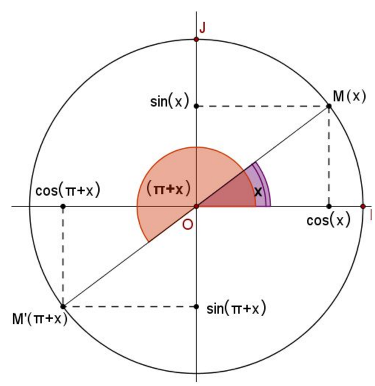
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Interprétation géométrique : les points images de x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (argument déjà évoqué lors de l'étude de la parité des fonctions cos et sin).



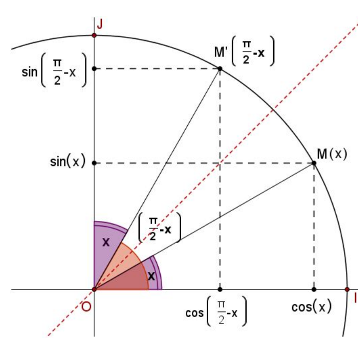
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Interprétation géométrique : les points images de x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.



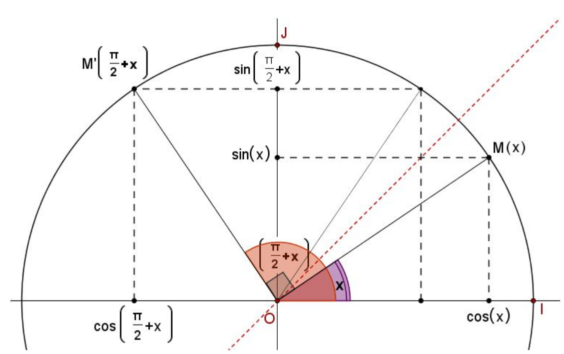
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

Interprétation géométrique : les points images de x et $\pi + x$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Interprétation géométrique : les points images de x et $\dfrac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport la première bissectrice des axes (la droite d'équation cartésienne $y = x$, en pointillés rouges sur la figure).)



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

Interprétation géométrique : on passe du point image de x au point image de $\dfrac{\pi}{2} + x$ en faisant d'abord une symétrie par rapport la première bissectrice des axes, puis une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

<u>Note</u> : sur cette page, a, b, p et q désignent des réels... raisonnables ! (attention à l'ensemble de définition de tan*)*

<u>Formules d'addition</u> : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{cases}$

En utilisant la parité de la fonction cosinus, et l'imparité des fonctions sinus et tangente, on obtient déjà :

<u>Formules "de soustraction"</u> : $\begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \\ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{cases}$

On déduit de ces formules les suivantes :

<u>Formules de duplication</u> : $\begin{cases} \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ \tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \end{cases}$

On peut également obtenir les formules ci-dessous à partir des formules d'addition :

<u>Formules de linéarisation</u> : $\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} & \text{d'où :} \quad \cos^2(a) = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} & \text{d'où :} \quad \sin^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2} \\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} & \text{d'où :} \quad \sin(a)\cos(a) = \dfrac{\sin(2a)}{2} \end{cases}$

Dans le "sens contraire", on peut transformer des sommes en produit :

$$\begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right) \end{cases}$$

Et pour finir, des relations souvent utiles en calcul intégral :

En posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, on a : $\begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$