

## CHAPITRE 3 — TRIGONOMÉTRIE

### I — Définitions et premières propriétés des fonctions trigonométriques

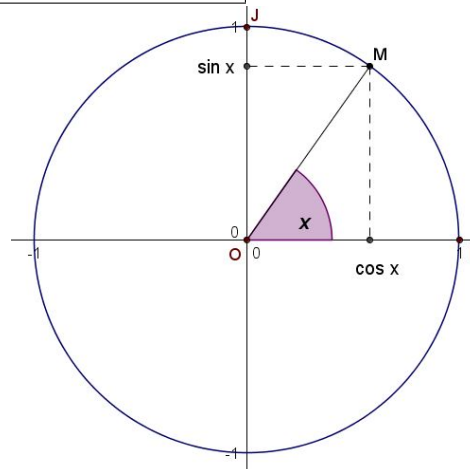
**DÉFINITIONS 1.** On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; I, J)$ .

Soit  $x$  un nombre réel.

1) On appelle **point image** du réel  $x$  le point  $M$  du cercle trigonométrique tel qu'une mesure en radians de l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OM})$  soit égale à  $x$ .

2) On appelle **cosinus du réel  $x$**  (resp. **sinus du réel  $x$** ) et on note  $\cos x$  (resp.  $\sin x$ ) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point  $M$ .

**Remarque :** il résulte de la définition que les fonctions cosinus et sinus sont **définies sur  $\mathbb{R}$  tout entier**.



**PROPRIÉTÉ 1 (“BORNITUDE”).** Les fonctions cosinus et sinus sont bornées sur  $\mathbb{R}$ . Plus précisément, ce sont deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[-1; 1]$  :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |\cos x| \leq 1 \\ |\sin x| \leq 1 \end{cases}$$

**Démonstration :** tout point appartenant au cercle trigonométrique a une abscisse et une ordonnée comprise entre  $-1$  et  $1$ .  $\square$

**PROPRIÉTÉ 2 (PÉRIODICITÉ).** Les fonctions cosinus et sinus sont  $2\pi$ -périodiques. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases}$$

**Démonstration :** Soit  $x$  un nombre réel. Les réels  $x$  et  $(x + 2\pi)$  ont la même image sur le cercle trigonométrique.  $\square$

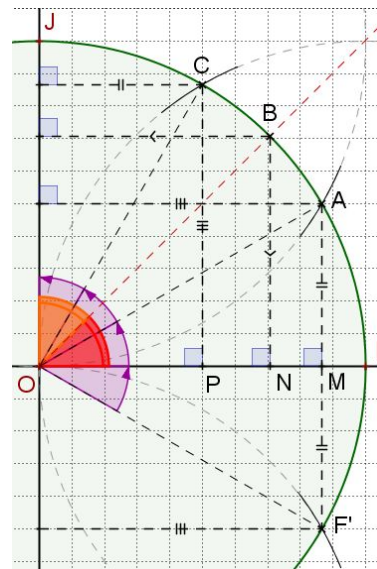
**PROPRIÉTÉ 3 (PARITÉ).** La fonction cosinus est paire, et la fonction sinus est impaire. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$$

**Démonstration :** Soit  $x$  un nombre réel. Les points images de  $x$  et  $-x$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.  $\square$

**PROPRIÉTÉ 4 (VALEURS REMARQUABLES).** Le graphique ci-contre représente une partie du cercle trigonométrique. Sur celui-ci, on a placé les points  $I, A, B, C$  et  $J$ , images respectives des réels  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{2}$ . On appelle valeurs remarquables les images de ces réels par les fonctions trigonométriques.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



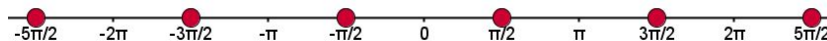
**Démonstration :** C'est un très amusant petit exercice de géométrie élémentaire!  $\square$

**Remarque :** on observe en particulier que  $\cos x = 0$  si et seulement si  $x = \pm \frac{\pi}{2} [2\pi]$ , soit si et seulement si  $x = \frac{\pi}{2} [\pi]$  (ou

**DÉFINITION 2.** Soit  $x$  un nombre réel tel que  $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$ .<sup>1</sup> On appelle **tangente du réel  $x$**  et on note  $\tan x$  le réel :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

**Remarque :** il résulte de cette définition que la fonction tangente est définie sur l'ensemble :  $\mathcal{D}_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} [\pi] \right\}$ . On observera que cet ensemble est symétrique par rapport à zéro ; sur le dessin suivant, l'ensemble  $\mathcal{D}_{\tan}$  est en effet constitué de la droite réelle "privée des points rouges".



**PROPRIÉTÉ 5 (PÉRIODICITÉ).** La fonction tangente est  $\pi$ -périodique. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(x + \pi) = \tan x$$

*Démonstration :* Laissée en exercice.  $\square$

**PROPRIÉTÉ 6 (PARITÉ).** La fonction tangente est impaire. En d'autres termes :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan(-x) = -\tan x$$

*Démonstration :* Laissée en exercice.  $\square$

**PROPRIÉTÉ 7 (VALEURS REMARQUABLES).** Les valeurs remarquables de la fonction tangente sont données dans le tableau ci-dessous :

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non-définie

*Démonstration :* c'est une conséquence directe de la définition de la fonction  $\tan$ , et de la propriété 4.  $\square$

## II — Etude des fonctions trigonométriques

### ► La fonction cosinus

☞ **Ensemble de définition :**  $\mathbb{R}$

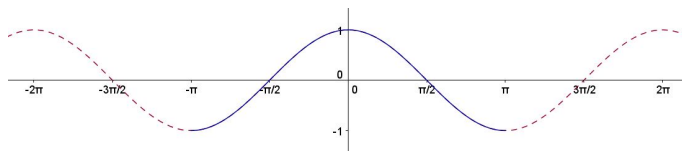
☞ **Dérivabilité :** la fonction  $\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos' x = -\sin x$$

☞ **Tableau de variation :**

$x$	$-\pi$	0	$\pi$
Signe de $-\sin x$	+	0	-
Variations de $\cos$	-1	1	-1

☞ **Courbe représentative :**



Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (cf parité). De plus, pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur  $[-\pi; \pi]$  puis d'appliquer des translations de vecteur  $2k\pi \vec{i}$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

► La fonction sinus

☞ Ensemble de définition :  $\mathbb{R}$

☞ Dérivabilité : la fonction sin est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin' x = \cos x$$

☞ Tableau de variation :

$x$	$-\pi$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$
Signe de $\cos x$	-	0	+	0
Variations de sin	0	$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		-1	1	0

► La fonction tangente

☞ Ensemble de définition :  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

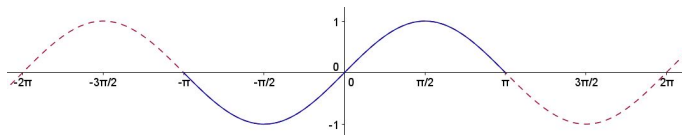
☞ Dérivabilité : la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} [\pi], \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

☞ Tableau de variation :

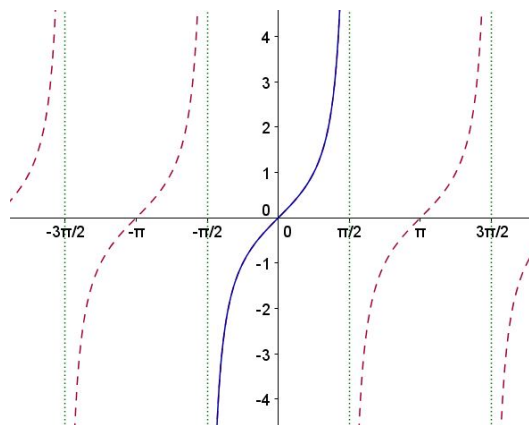
$x$	$-\pi/2$	$\pi/2$
Signe de $\tan' x$		+
Variations de tan	$-\infty$	$+\infty$

☞ Courbe représentative :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère (cf parité). Comme pour la fonction cosinus, pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur  $[-\pi; \pi]$  puis d'appliquer des translations de vecteur  $2k\pi \vec{i}$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

☞ Courbe représentative :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère (cf parité). Pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur  $]-\pi/2; \pi/2[$  puis d'appliquer des translations de vecteur  $k\pi \vec{i}$  (avec  $k \in \mathbb{Z}$ ).

**III — Formulaire de trigonométrie circulaire**

Voir formulaire joint.