Exercices 3 – Trigonométrie

Utilisation du formulaire

Exercice 1. — Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2. — Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$

Exercice 3. — Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. — Simplifier l'expression $\dfrac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}$. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 5. — Démontrer la formule d'addition pour la tangente.

Exercice 6. — Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.

Exercice 7. — Ecrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ les expressions suivantes :

1) $\cos(x)+\sin(x)$ 2) $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)$

Equations trigonométriques

Exercice 8. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $2\sin(x)-1=0$ 3) $2\cos(x)+\sqrt{3}=0$ 4) $(\cos(x)+1)\sin(x)=0$

Exercice 9. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos(2x)=\cos(3x)$ 2) $\cos(x)=\cos(\pi-x)$ 3) $\cos(x)=\sin(x+\pi)$ 4) $\cos(2x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 10. — **(Plus amusant)**. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin(x)+\sin(2x)=0$ 2) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0$ 3) $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1$

Exercice 11. — **(Encore plus amusant)**. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan(x)\tan(2x)=1$.

Exercice 12. — **(Plus théorique)**. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels A, B et C pour que l'équation $A\cos(x)+B\sin(x)=C$ admette des solutions dans $\mathbb{R}$.

Un peu d'analyse pour finir

Exercice 13. — Etablir les inégalités suivantes.

1) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \sin(x)\leqslant x$ 2) $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(x)\geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}$ 3) $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x)\geqslant x$

Exercice 14. — Etude complète de la fonction $f : t\longmapsto \cos^3(t)$ *(par "étude complète" on entend : ensemble de définition, périodicité éventuelle, parité éventuelle, sens de variation, tableau de variation).*

Questions extraites de DS

Exercice 15. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $\cos(x)+\cos(5x)=0$.

Exercice 16. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E2) : $\cos(2x)+\sin(3x)=0$

Exercice 17. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E4) : $\cos^6(x)+\sin^6(x)=1$

Exercice 18. — **(Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$).**

1/ A l'aide de la formule de duplication pour le cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2/ **Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.** On sait, ou on peut établir sans trop de difficultés que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{\cdots+}\cdots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

en ayant noté dans cette formule un certain nombre de signes "+", de "$\sqrt{\ }$", et de petits points.

L'objet de cette partie est de transformer cette peu sérieuse observation en énoncé précis, et de le démontrer. A cette fin, on introduit deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) est définie en posant : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$;
- la suite (v_n) est définie par : $v_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}$.

a/ Etablir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n\geqslant 0$.

b/ Etablir que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)=\dfrac{v_n}{2}$.