Exercices 3 – Trigonométrie – Corrigé

Utilisation du formulaire

Exercice 1. — Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Observons que : $\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{\pi}{8}$. Selon une (des trois) formule de duplication pour le cos, on en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

Il s'ensuit que :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Or, puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$.

Conclusion 1. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

En outre, selon la relation fondamentale de la trigonométrie : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

Donc : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

D'après ce qui précède : $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} \iff \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

On en déduit que : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Or, puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$.

Conclusion 2. $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. On en déduit (avec la conclusion 1) que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Exercice 2. — Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$

Observons que : $\frac{\pi}{8} = 2\times\frac{\pi}{16}$. Selon une (des trois) formule de duplication pour le cos, on en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) - 1$$

Il s'ensuit que (en utilisant la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ calculée dans l'exo précédent) :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \iff \cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4} \iff \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Or, puisque $\frac{\pi}{16} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) > 0$.

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

Exercice 3. — Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

On pourrait faire un copier-coller de l'exercice 1, et utiliser la formule de duplication pour obtenir $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à partir de l'observation : $\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{\pi}{12}$.

On propose ici une méthode différente, en partant du fait que : $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

On en déduit, avec la formule de soustraction pour le cos :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

De manière analogue, avec la formule de soustraction pour le sin :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4. — Simplifier l'expression $\frac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}$. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Selon le formulaire :

$$\frac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)} = \frac{-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On a ainsi établi que : $\tan\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{\cos(q)-\cos(p)}{\sin(p)+\sin(q)}$

En appliquant cette formule avec $p = \frac{\pi}{3}$ et $q = \frac{\pi}{4}$, on obtient :

$$\tan\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \Longleftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} \Longleftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Conclusion. $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Exercice 5. — Démontrer la formule d'addition pour la tangente.

Soient a et b deux réels raisonnables... càd tels que a, b et $a+b$ sont dans l'ensemble de définition de la fonction tangente.

On a :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} = \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} \times \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\times\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}$$

Conclusion. Pour tout couple de réels (a,b) tel que $a \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, $b \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ et $a+b \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Exercice 6. — Exprimer $\cos(3a)$ en fonction de $\cos(a)$.

Soit a un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned}
& \cos(3a) = \cos(2a+a) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(3a) = \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(3a) = \left(2\cos^2(a)-1\right)\cos(a) - 2\sin(a)\cos(a)\sin(a) \quad \text{(formules de duplication)} \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(3a) = 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\sin^2(a)\cos(a) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(3a) = 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\left(1-\cos^2(a)\right)\cos(a) \quad \text{(relation fondamentale de la trigo)} \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(3a) = 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a) + 2\cos^3(a) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$

Exercice 7. — Ecrire sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ les expressions suivantes :

1) $\cos(x)+\sin(x)$ 2) $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)$

1) Soit x un réel. On a :

$$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

2) Soit x un réel. On a :

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)\right) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Equations trigonométriques

Exercice 8. — Résoudre $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi[$ les équations suivantes :

1) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{(formulaire)} \\
\Longleftrightarrow\ &x = \pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \qquad \text{(cours)}
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Remarque. Il revient au même d'écrire que : "l'ensemble S des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\text{"}$$

Mais c'est plus long...

2) $2\sin(x) - 1 = 0$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&2\sin(x) - 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(x) = \frac{1}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{(formulaire)} \\
\Longleftrightarrow\ &x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \text{(cours)}
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (2\sin(x) - 1 = 0) \Longleftrightarrow \left(x = \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]\right)$

3) $2\cos(x) + \sqrt{3} = 0$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&2\cos(x) + \sqrt{3} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ &\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Longleftrightarrow\ &\cos(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \qquad \text{(formulaire)}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \text{(cours)}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\cos(x) + \sqrt{3} = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

4) $(\cos(x) + 1)\sin(x) = 0$

Soit x un réel. On a :

$$(\cos(x) + 1)\sin(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x) + 1 = 0 \text{ ou } \sin(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x) = -1 \text{ ou } \sin(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \pi\ [2\pi] \text{ ou } x = 0\ [\pi]$$

$$\Longleftrightarrow x = 0\ [\pi]$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\cos(x) + 1)\sin(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0\ [\pi]$

Exercice 9. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos(2x) = \cos(3x)$

Soit x un réel. On a :

$$\cos(2x) = \cos(3x)$$

$$\Longleftrightarrow 3x = \pm 2x\ [2\pi] \qquad \text{(cours)}$$

$$\Longleftrightarrow 3x = 2x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x = -2x\ [2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow x = 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 5x = 0\ [2\pi]$$

$$\Longleftrightarrow x = 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

$$\Longleftrightarrow x = 0\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = \cos(3x) \Longleftrightarrow x = 0\ \left[\frac{2\pi}{5}\right]$

2) $\cos(x) = \cos(\pi - x)$

Soit x un réel. On a :

$$\cos(x) = \cos(\pi - x)$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x) = -\cos(x) \qquad \text{(formulaire)}$$

$$\Longleftrightarrow 2\cos(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \cos(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \cos(\pi - x) \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

3) $\cos(x) = \sin(x+\pi)$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(x) = \sin(x+\pi)\\
&\Longleftrightarrow \cos(x) = -\sin(x) \qquad \text{(formulaire)}\\
&\Longleftrightarrow \cos(x) + \sin(x) = 0\\
&\Longleftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad \text{(exo 7, question 1)}\\
&\Longleftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0\\
&\Longleftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,[\pi]\\
&\Longleftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}\,[\pi]
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sin(x+\pi) \Longleftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}\,[\pi]$

4) $\cos(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\\
&\Longleftrightarrow \cos(2x) = \cos(x) \qquad \text{(formulaire)}\\
&\Longleftrightarrow 2x = \pm x\ \ [2\pi] \qquad \text{(cours)}\\
&\Longleftrightarrow 2x = x\ \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x = -x\ \ [2\pi]\\
&\Longleftrightarrow x = 0\ \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x = 0\ \ [2\pi]\\
&\Longleftrightarrow x = 0\ \ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]\\
&\Longleftrightarrow x = 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow x = 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$

Exercice 10. — **(Plus amusant).** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin(x) + \sin(2x) = 0$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\sin(x) + \sin(2x) = 0\\
&\Longleftrightarrow \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \qquad \text{(formulaire)}\\
&\Longleftrightarrow \sin(x)\,(1 + 2\cos(x)) = 0\\
&\Longleftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow x = 0\,[\pi] \text{ ou } x = \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\sin(x) + \sin(2x) = 0) \Longleftrightarrow \left(x = 0\,[\pi] \text{ ou } x = \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]\right)$

2) $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0$

Soit x un réel.

Selon le formulaire, on a : $\sin(x)+\sin(3x)=2\sin(2x)\cos(x)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0\\
&\Longleftrightarrow 2\sin(2x)\cos(x)+\sin(2x)=0\\
&\Longleftrightarrow \sin(2x)\,(2\cos(x)+1)=0\\
&\Longleftrightarrow x=0\,\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x=\pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x\in\mathbb{R},\ (\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=0)\Longleftrightarrow\left(x=0\,\left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x=\pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]\right)$

3) $\cos^4(x)+\sin^4(x)=1$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos^4(x)+\sin^4(x)=1\\
&\cos^4(x)+\sin^4(x)=\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)^2 \quad \text{(utilisation diabolique du formulaire)}\\
&\Longleftrightarrow \cos^4(x)+\sin^4(x)=\cos^4(x)+2\cos^2(x)\sin^2(x)+\sin^4(x)\\
&\Longleftrightarrow 2\cos^2(x)\sin^2(x)=0\\
&\Longleftrightarrow \cos(x)=0 \text{ ou } \sin(x)=0\\
&\Longleftrightarrow x=\frac{\pi}{2}\,[\pi] \text{ ou } x=0\,[\pi]\\
&\Longleftrightarrow x=0\,\left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x\in\mathbb{R},\ \left(\cos^4(x)+\sin^4(x)=1\right)\Longleftrightarrow\left(x=0\,\left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$

Exercice 11. — (Encore plus amusant). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\tan(x)\tan(2x)=1$.
La première chose à faire est de déterminer l'ensemble de définition de l'équation, càd l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $\tan(x)$ et $\tan(2x)$ sont simultanément définis.

A cette fin, notons que :

$$\tan(x) \text{ est défini SSI } x\neq\frac{\pi}{2}\,[\pi]\,;\text{ et } \tan(2x) \text{ est défini SSI } x\neq\frac{\pi}{4}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Soit donc x un réel tel que $x\neq\frac{\pi}{2}\,[\pi]$ et $x\neq\frac{\pi}{4}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

On a :

$$\tan(x)\tan(2x)=1\Longleftrightarrow\frac{\sin(x)\sin(2x)}{\cos(x)\cos(2x)}=1\Longleftrightarrow\cos(x)\cos(2x)=\sin(x)\sin(2x)$$
$$\Longleftrightarrow\cos(x)\cos(2x)-\sin(x)\sin(2x)=0\Longleftrightarrow\cos(3x)=0\Longleftrightarrow x=\frac{\pi}{6}\,\left[\frac{\pi}{3}\right]$$

Conclusion. Soit x un nombre réel. On a :

$$(\tan(x)\tan(2x)=1)\Longleftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{6}\,\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ et } x\neq\frac{\pi}{2}\,[\pi] \text{ et } x\neq\frac{\pi}{4}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Exercice 12. — (Plus théorique). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels A, B et C pour que l'équation $A\cos(x)+B\sin(x)=C$ admette des solutions dans $\mathbb{R}$.
L'équation $A\cos(x)+B\sin(x)=C$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$ SSI $|C|\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$ ou $A=B=C=0$ (voir détails en cours).

Un peu d'analyse pour finir

Exercice 13. — Etablir les inégalités suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leqslant x$

   Pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose : $f(x) = \sin(x) - x$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \cos(x) - 1$

   La fonction cos étant majorée par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) \leqslant 0$

   Il s'ensuit que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Par ailleurs, il est immédiat que : $f(0) = 0$.

   On déduit des deux lignes précédentes que f est négative sur $\mathbb{R}_+$, d'où la conclusion.

   Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leqslant x$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$

   Même principe que dans la question précédente (étude de fonction).

3) $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[\ ,\ \tan(x) \geqslant x$

   Même principe que dans les 2 questions précédentes (étude de fonction).

Exercice 14. — Etude complète de la fonction $f : t \longmapsto \cos^3(t)$ *(par "étude complète" on entend : ensemble de définition, périodicité éventuelle, parité éventuelle, sens de variation, tableau de variation).*

Sans rentrer dans le détail, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (essentiellement car cos l'est), 2π-périodique (car cos l'est), et paire (car...).

Puisque f est 2π-périodique, il suffit d'étudier ses variations sur $[-\pi, \pi]$.[1]

Puisqu'en outre f est paire, il suffit même d'étudier ses variations sur $[0, \pi]$.

La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$ et :

$$\forall t \in [0, \pi],\ f'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t)$$

Il s'ensuit que $f'(t)$ est du signe de $-\sin(t)$ lorsque $t \in [0, \pi]$.

Donc : $\forall t \in [0, \pi],\ f'(t) \leqslant 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $[0, \pi]$. Puisque f est paire, on en déduit que f est croissante sur $[-\pi, 0]$.

Questions extraites de DS

Exercice 15. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $\cos(x) + \cos(5x) = 0$.

Soit x un réel. D'après le cours :

$$\cos(x) + \cos(5x) = 2\cos\left(\frac{x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-5x}{2}\right) = 2\cos(3x)\cos(-2x) = 2\cos(3x)\cos(2x)$$

On en déduit que x est solution de (E_1) si et seulement si : $2\cos(3x)\cos(2x) = 0$

Or :

$2\cos(3x)\cos(2x) = 0$

$\Longleftrightarrow \cos(3x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(2x) = 0$

$\Longleftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \quad \text{ou} \quad 2x = \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

1. Cet intervalle étant de longueur 2π, il suffit de connaître la fonction f sur cet intervalle pour la connaître sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Conclusion. Soit x un réel. On a :

$$(\cos(x) + \cos(5x) = 0) \Longleftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Exercice 16. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E2) : $\cos(2x) + \sin(3x) = 0$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(2x) + \sin(3x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(2x) = -\sin(3x) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(2x) = \sin(-3x) \qquad (\text{car sin impaire}) \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \qquad \left(\text{car } \sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ pour tout réel } \theta\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{c} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 3x\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} - 3x\ [2\pi] \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ 5x = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Conclusion. $[\cos(2x) + \sin(3x) = 0] \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{10} \left[\dfrac{2\pi}{5}\right] \end{array}\right.$

Exercice 17. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E4) : $\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1$

Soit x un réel. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \Big(\underbrace{\cos^2(x) + \sin^2(x)}_{=1}\Big)^3 - 3\cos^4(x)\sin^2(x) - 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & -3\cos^4(x)\sin^2(x) - 3\cos^2(x)\sin^4(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^4(x)\sin^2(x) + \cos^2(x)\sin^4(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^2(x)\sin^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos^2(x)\sin^2(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \sin(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

Conclusion. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\left[\cos^6(x) + \sin^6(x) = 1\right] \Longleftrightarrow \left[x = 0 \quad \left[\frac{\pi}{2}\right]\right]$

Exercice 18. — $\boxed{\textbf{(Calcul de } \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\textbf{).}}$

1/ A l'aide de la formule de duplication pour le cosinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$. Il s'ensuit que :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Longleftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.

Conclusion. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2/ Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. On sait, ou on peut établir sans trop de difficultés que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

On peut conjecturer que pour tout entier naturel non nul on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{\cdots+}\cdots+\sqrt{2}}}}}{2}$$

en ayant noté dans cette formule un certain nombre de signes "+", de "$\sqrt{\ }$", et de petits points.

L'objet de cette partie est de transformer cette peu sérieuse observation en énoncé précis, et de le démontrer. A cette fin, on introduit deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) est définie en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$;
- la suite (v_n) est définie par : $v_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$.

a/ Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \geqslant 0$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$v_n \geqslant 0$".

L'assertion $P(1)$ est vraie d'après l'énoncé (♠).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $v_{n+1} = \sqrt{2+v_n}$, et que $v_n \geqslant 0$ (HR), on en déduit que $v_{n+1} \geqslant 0$. Donc l'assertion $P(n+1)$ est vraie. On a établi l'hérédité de la propriété (♣).

On déduit de (♠) et (♣) que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n \geqslant 0$

b/ Etablir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion : "$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_n}{2}$".

L'assertion $P(1)$ est vraie puisque $v_1 = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (♠).

Supposons à présent que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Une nouvelle application de la formule de duplication donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1. \qquad \text{D'où : } \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence : $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1+\dfrac{v_n}{2}}{2} = \dfrac{2+v_n}{4}$ $\quad(\heartsuit)$

Puisque $2+v_n$ est positif (question précédente), et que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$ est positif (car $0 < \dfrac{\pi}{2^n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$), on déduit de $(\heartsuit)$ que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{\sqrt{2+v_n}}{2} \qquad \text{soit encore :} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{v_{n+1}}{2}$$

Cette égalité signifie que l'assertion $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété $(\clubsuit)$.

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) = \dfrac{v_n}{2}$